青年自学丛书

数 学

上海人民出版社

青年自学丛书

数 学

（下 册）

上海师范大学数学系 编

上海人民出版社

青年自学丛书
数　学
（下　册）
上海师范大学数学系　编
上海人民出版社出版
（上海绍兴路5号）
新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 9.75　字数 212,000
1975年11月第1版　1975年11月第1次印刷
统一书号：13171·156　定价：0.52元

毛主席语录

马克思主义包含有自然科学，大家要来研究自然科学，否则世界上就有许多不懂的东西，那就不算一个最好的革命者。

马克思主义的哲学认为十分重要的问题，不在于懂得了客观世界的规律性，因而能够解释世界，而在于拿了这种对于客观规律性的认识去能动地改造世界。

农村是一个广阔的天地，在那里是可以大有作为的。

《青年自学丛书》编辑说明

毛主席教导我们："**知识青年到农村去，接受贫下中农的再教育，很有必要。**"在毛主席的伟大号召下，一批又一批有共产主义觉悟的青年生气勃勃地奔赴农村，这是对缩小三大差别、限制资产阶级法权有深远意义的伟大事业。

在农村这个广阔的天地里，广大知识青年认真读马、列的书，读毛主席的书，朝气蓬勃地战斗在三大革命运动的第一线，坚定地走同工农相结合的道路，对建设社会主义新农村作出了贡献，无产阶级英雄人物不断涌现，一代革命青年正在茁壮成长。这是毛主席革命路线的伟大胜利。

按照毛主席关于"**要关怀青年一代的成长**"的教导，为了适应广大上山下乡知识青年自学的需要，特编辑、出版这套《青年自学丛书》。丛书以马列主义、毛泽东思想为指导，内容包括哲学、社会科学、文学、自然科学的一些基本知识和实用农业技术知识等。我们希望，这套丛书的出版，能对上山下乡知识青年的学习起积极作用，有助于他们进一步提高阶级斗争、路线斗争和无产阶级专政下继续革命的觉悟，进一步提高政治理论水平和文化科学水平，在又红又专的道路上阔步前进，更好地适应建设社会主义新农村和各项事业发展的需要。

我们对大力支持这套丛书的出版工作的有关单位和作者，表示衷心的感谢，并欢迎广大读者对这套丛书提出意见和批评，以便改进。

上海人民出版社

目　录

第七章　抛物线、二次函数和一元二次方程

第一节　抛　物　线

一、什么是抛物线

恩格斯指出："数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。" 物体抛射出去后在空中运动的轨迹，使我们得到抛物线的概念．在不考虑空气阻力的情况下，炮弹的弹道曲线；浇农浇水时从水管里喷射出来的水流；打篮球时球在空中的运动轨迹等等，都是抛物线的一段．下面我们以飞机空投物资问题为例，来引进抛物线的方程．

为支援抗洪斗争，我人民解放军空军某部奉命把抗洪物资空投到某村庄．假设投掷物品时，飞机的高度为 h，飞行沿着水平方向，速度是 v．那么飞机应该在和村庄的水平距离多远的地方将物品掷下(空气阻力略去不计)？

我们以投掷时飞机所在的位置为坐标原点，过原点的水平线为 x 轴，以飞机飞行的方向为 x 轴的正向；过原点的铅垂线为 y 轴，以向下方向为正(图 7-1)．设经过时间 t 后，掷下物品到达位置 $P(x, y)$．

我们知道，掷下的物品在空中运动所经的路线，是由两方面的因素决定的．当物品离开飞机时，一方面由于惯性的作

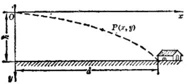


图 7-1

用，飞机给它一个水平速度，使它沿着飞机飞行的方向作等速运动，它的速度就是飞机的速度 v．因此在时刻 t，空投物品在水平方向移动的距离是

$$x=vt. \qquad (1)$$

另一方面，由于重力的作用，使空投物品向下作等加速运动．在时刻 t，物品落下的距离 y，由力学原理知道，应该是

$$y=\frac{1}{2}gt^2, \qquad (2)$$

其中 g 是重力加速度．

(1)和(2)式就是描写空投物品运动过程的方程．当时刻 t 取某一确定值时，由(1)和(2)式可以算出空投物品 P 在这一时刻的位置的坐标 x 和 y．随着时刻 t 的不断变化，点 P 的位置就相应地连续变动．这样，动点 $P(x, y)$ 就描绘出空投物品的运动轨迹．

现在我们来消去变量 t，得到 x 和 y 的直接关系式．由(1)式得

$$t=\frac{x}{v},$$

代入(2)式，得

$$y=\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v}\right)^2,$$

即

$$x^2=2\frac{v^2}{g}y. \tag{3}$$

(3)式就是在任一时刻，点 P 的坐标 x 和 y 所要满足的运动轨迹方程，其中 v，g 是常数．

设投掷物品时，飞机和村庄的水平距离为 d．为了准确地把物品投送到村子里，村庄的坐标 $(d,\ h)$ 就应该适合于(3)式：

$$d^2=\frac{2v^2}{g}h.$$

这就是说，飞行员应该当飞机和村庄的水平距离为

$$d=v\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

时投下物品．

在数学里，我们一般地把(3)式这种类型的方程，写成形如

$$x^2=\pm 2py$$

或

$$y^2=\pm 2px \quad (p>0)$$

的形式．这些方程的特征是：只含有一个变数的二次项和另一个变数的一次项．它们所确定的曲线叫做抛物线．而这些方程叫做抛物线的标准方程．

练习

在上例中，如果飞机在投掷物品时的飞行高度 $h=490$ 米，飞机沿水平方向飞行的速度 $v=150$ 米/秒，求在图 7-1 的坐标系中，被投掷物品的轨道曲线方程．为使物品准确地投入村庄，飞机应在和村庄的水平距离多远的地方将物品投下(重力加速度 $g=9.8$ 米/秒^2，空气阻力略去不计)．

$\left[x^2=\dfrac{225000}{49}y,\ 1500\text{米}.\right]$

二、抛物线的形状

我们虽然已经知道抛物线的大体形状，但认识还有待于深化．上述飞机投掷物品的轨道曲线，只是抛物线的一段．要比较全面地掌握某种曲线的几何性质，一个重要的方法是根据曲线的方程来探讨．下面我们以方程

$$x^2=2py \qquad (1)$$

为例，对抛物线的形状作进一步的讨论．

1．在方程(1)中，以$(-x)$代替x，方程不变．这就是说，如果点(x, y)是抛物线(1)上的一点，那么点$(-x, y)$也在这抛物线上．所以这抛物线是轴对称图形，它的对称轴就是y轴．我们说，这抛物线关于y轴对称(图7-2)．

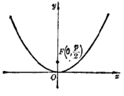


图 7-2

2．抛物线和它的对称轴的交点，叫做抛物线的顶点．抛物线(1)的对称轴(即y轴)的方程是$x=0$．那么，顶点的坐标，就是抛物线方程(1)和它的对称轴的方程$x=0$所组成的方程组的解．我们把$x=0$代入(1)式，得$y=0$．即抛物线(1)以坐标原点为顶点．

3．在方程(1)中，左边

$$x^2\geqslant 0,$$

因而右边也应满足

$$2py\geqslant 0.$$

因为常数p是正数，所以必有$y\geqslant 0$．由此可知，整个抛物线(1)都在$y\geqslant 0$的半平面内(即x轴的上方)．

4．对于$y\geqslant 0$的任一值，可得

$$x=\pm\sqrt{2py}.$$

从上式知道，当 y 的值增大时，x 的绝对值也随着增大．因此，抛物线(1)向左上方和右上方无限伸展，形成一条向上开口的曲线．

5．y 轴上的点 $F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$ 叫做抛物线的焦点．方程(1)中的常数 p，确定了焦点 F 的纵坐标，因此我们把 p 叫做焦点参数．

【例 1】 画抛物线 $x^2=3y$，并求它的焦点坐标．

解：根据对抛物线 $x^2=2py$ 的讨论可知，抛物线 $x^2=3y$ 的顶点在原点，对称轴是 y 轴，抛物线在 x 轴的上方，向上开口．用描点法可以把它的图象画出来．将原方程变为

$$y=\frac{x^2}{3},$$

可作出下面的数值表：

x	0	±1	±2	±3	±4	…
y	0	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	3	$5\frac{1}{3}$	…

根据上表数据，在直角坐标系内描点，并用平滑的曲线按从左到右的顺序连接各点，便得到图 7-3 所示的抛物线．

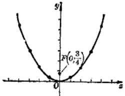


图 7-3

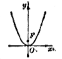
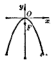
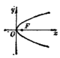
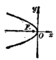
因为 $2p=3$，$\frac{p}{2}=\frac{3}{4}$，所以焦点的坐标是 $\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$．

上面只讨论了抛物线 $x^2=2py$ 的形状，它的顶点在原点，焦点在

y 轴的正半轴上，曲线是向上开口的．方程

$$x^2=-2py,\quad y^2=2px,\quad y^2=-2px$$

所确定的曲线，也都是以坐标原点为顶点的抛物线，只是它们在坐标系中的相对位置不同，开口方向也不同．现在把抛物线的四种标准方程和它们的图形列表如下（其中 $p>0$）：

图　形				
方　程	$x^2=2py$	$x^2=-2py$	$y^2=2px$	$y^2=-2px$
焦　点	$F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0,\ -\frac{p}{2}\right)$	$F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$

上面这类方程，例如

$$x^2=2py,$$

移项，得

$$x^2-2py=0,$$

它们都含有两个变数，并且变数的最高次数是二次，叫做二元二次方程．一般的二元二次方程具有下面的形式：

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

我们将会看到，不同形式的二元二次方程，确定不同的曲线．这里，形如

$$Ax^2+Ey=0$$

或

$$Cy^2+Dx=0$$

的二元二次方程，都表示抛物线．

【例 2】　求抛物线 $2y^2+9x=0$ 的焦点的坐标，并且画出图形．

解：原方程就是

$$y^2=-\frac{9}{2}x.$$

这是以 x 轴为对称轴，向左开口的抛物线．这里 $2p=\frac{9}{2}$，$\frac{p}{2}=\frac{9}{8}$．所以它的焦点的坐标是 $\left(-\frac{9}{8},\ 0\right)$．

按照 $x=-\frac{2y^2}{9}$，作下面的数值表：

y	0	±1	±2	±3	±4	$\cdots$
x	0	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{8}{9}$	-2	$-3\frac{5}{9}$	$\cdots$

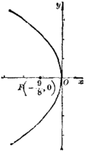


图 7-4

根据上表数据，就可以画出如图 7-4 所示的抛物线．

抛物线绕对称轴旋转，就形成抛物面．如果将点光源放在抛物线的焦点 F 处［图 7-5(1)］，它射出的光线经过抛物面的反射，就变成与对称轴平行的一束平行光线．根据这个道理，探照灯与汽车前灯的反光曲面都是做成抛物面的［图 7-5(2)、(3)］．

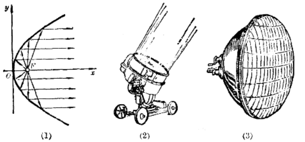


图 7-5

反过来，平行光线经过抛物面的反射，就会聚在焦点[图 7-6(1)]．太阳灶就是根据这个原理设计的[图 7-6(2)]．它的形状就象一把倒放的雨伞，这个凹形伞面是一个抛物面．太阳光经抛物面的反射，聚光在焦点．因此，焦点处温度很高，如将炊具放在焦点位置，就可烧水、煮饭．

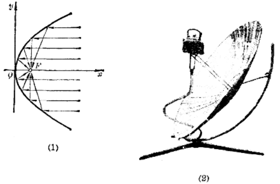


图 7-6

【例 3】 某厂广大工人和技术人员，通过批林批孔运动，抓革命，促生产，在短时间内试制成功了伞形太阳灶，为我国开展利用太阳能的工作作出了贡献．这种太阳灶的抛物线方程为

$$y^2=2600x$$

(单位：毫米)，问炊具支持架应设计在抛物线对称轴上离顶点多远的地方？

解：这就是要求出焦点的坐标．由方程

$$y^2=2600x$$

可得

$$2p=2600,$$

即

$$\frac{p}{2}=650.$$

所以焦点的坐标是(650, 0)．即炊具支持架应设计在抛物线对称轴上离顶点650毫米处．

【例4】 汽车前灯的反光曲面，是将抛物线围绕它的对称轴旋转而成的抛物镜面．它的抛物线图形如图7-7所示(单位:毫米)．要使光线经过反射后成为平行光束，灯泡应放在什么位置?

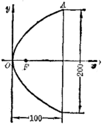


图 7-7

解：由抛物线的光学特性我们知道，这也是要求出焦点F坐标的问题．为此，我们先求抛物线的方程．在图7-7所示的坐标系里，这抛物线的方程具有形式

$$y^2=2px.$$

把点A的坐标(100, 100)代入这方程，得

$$100^2=2p\times 100,$$

因此

$$p=50.$$

所以焦点的坐标是(25, 0)．即灯泡应装在离灯底25毫米处．

抛物线的图形，可以象例1那样根据方程来画．另外我们再介绍一种几何画法．

设求作的抛物线拱的宽(即开口处)是$2b$，高是h．作长方形$ABCD$，使$DA=2b$，$AB=h$(图7-8)．取DA的中点O．把线段OA和AB分成相同的等分(图中都是5等分，分点越多越精确)．连接点O和AB上的各分点B_1，B_2，B_3，…，得

OB_1, OB_2, OB_3, $\cdots$. 过 OA 上的各分点 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, 作 OA 的垂线，它们顺次和 OB_1, OB_2, OB_3, $\cdots$ 相交于 P_1, P_2, P_3, $\cdots$ 各点. 用平滑的曲线连接 O, P_1, P_2, P_3, $\cdots$, B 各点，就得到所求抛物线拱的一半. 再利用抛物线的对称性，可画出拱形的另一半.

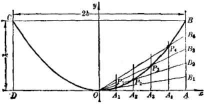


图 7-8

为什么这样画出来的曲线是抛物线呢？我们以点 P_1 为例来说明.

在图 7-8 中，取直线 DA 为 x 轴，O 为原点，建立直角坐标系. 这样，点 B 的坐标是 (b, h).

设点 P_1 的坐标是 (x, y). 由

$$\triangle OA_1P_1 \backsim \triangle OAB_1,$$

得

$$\frac{A_1P_1}{AB_1}=\frac{OA_1}{OA},$$

就是

$$\frac{y}{AB_1}=\frac{x}{b},$$

所以

$$y=AB_1\frac{x}{b}. \qquad (1)$$

又从作图方法知道

$$\frac{AB_1}{AB}=\frac{OA_1}{OA},$$

就是

$$\frac{AB_1}{h}=\frac{x}{b},$$

所以

$$AB_1=h\frac{x}{b}.$$

将上式代入(1)式，得

$$y=\frac{h}{b^2}x^2,$$

也就是

$$x^2=\frac{b^2}{h}y.$$

这说明，点 P_1 在抛物线

$$x^2=\frac{b^2}{h}y$$

上．同样，P_2，P_3，… 各点也都在这条抛物线上．所以用上面的方法画成的曲线是抛物线．

练习

1．求下列各抛物线的焦点的坐标，并且画出图形：

(1) $y^2=4x$;　　(2) $2x+5y^2=0$;

(3) $y=\frac{1}{2}x^2$;　　(4) $x^2=-3y$.

2．用几何画法，按 1:100 画拱宽 13.5 米，高 4.5 米的抛物线形桥拱．

[1．(1) $(1, 0)$; (2) $\left(-\frac{1}{10}, 0\right)$; (3) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; (4) $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.]

三、对称轴平行于坐标轴的抛物线

拱桥在我国具有悠久的历史．目前仍然保留下来的不少古代拱桥，是我国桥梁建筑方面的宝贵遗产．我国广大桥梁工人遵照毛主席关于“自力更生”、“古为今用”的教导，在古代拱桥结构的基础上，创造了双曲拱桥(图 7-9．双曲是指在纵

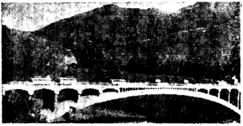


图 7-9

横两个方面都弯曲). 这种桥梁具有造价低、自重轻、材料省、施工方便、桥型美观等优点,在我国已广为应用. 雄伟的南京长江大桥的公路引桥,就是采用双曲拱桥的结构.

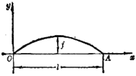


图 7-10

双曲拱桥的桥拱有的采用抛物线形. 如图 7-10 所示的抛物线拱桥, 跨径(即拱宽)为 l, 矢高(即拱高)为 f. 在预制拱架前, 需要求出方程并进行放样. 在生产实践中, 为了放样方便, 一般以桥拱的一端为坐标原点,建立直角坐标系(图 7-10).

怎样建立这种坐标系下的抛物线方程呢? 为此, 我们先介绍坐标轴的平移.

1. 坐标轴的平移 点的坐标是对于某一个确定的坐标系来说的. 为了便于处理某些有关图形的问题,往往需要用另一个直角坐标系来代替原来的坐标系.

例如, 改变原点的位置, 但坐标轴的方向和长度单位不

变，这样的坐标变换叫做坐标轴的平移.

“每一事物的运动都和它的周围其他事物互相联系着和互相影响着。”坐标系变了，点的坐标也随着改变．这就要研究在新旧坐标系中，点的坐标的内在联系问题．

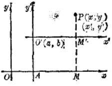


图 7-11

如图 7-11 所示，Ox 和 Oy 是原来的坐标轴，$O'x'$ 和 $O'y'$ 是平移后的新坐标轴．新坐标系的原点 O' 在旧坐标系中的坐标是 (a, b)．

设点 P 是平面内任意一点，它在旧坐标系中的坐标是 (x, y)，在新坐标系中的坐标是 (x', y')．那么从图中可以看出，

$$x = OA + AM = OA + O'M' = a + x',$$
$$y = MM' + M'P = AO' + M'P = b + y',$$

就是

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases} \qquad (1)$$

这两个式子是用点的新坐标 x' 和 y'，表示它的旧坐标 x 和 y．(a, b) 是新坐标系的原点在旧坐标系中的坐标．以后我们把这两个公式叫做移轴公式．移轴公式显然也可以写成

$$\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases} \qquad (2)$$

这是用旧坐标 x 和 y 来表示新坐标 x' 和 y'．

【例 5】 平移坐标轴，把原点移到 $O'(-4, 5)$，求点 $A(3, -2)$ 的新坐标．

解：这是已知点的旧坐标 $x=3$, $y=-2$ 来求它的新坐标．因为 $a=-4$, $b=5$，代入移轴公式(2)，得

$$x'=3-(-4)=7,$$
$$y'=-2-5=-7.$$
即点 A 的新坐标是 $(7,\ -7)$（图 7-12）.

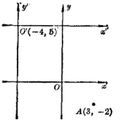


图 7-12

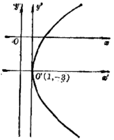


图 7-13

【例 6】 平移坐标轴，把原点移到 $O'(1,\ -3)$，求方程
$$y^2-8x+6y+17=0$$
所表示的曲线在新坐标系中的方程.

解：方程 $y^2-8x+6y+17=0$ 指出了曲线上一切点的旧坐标 $x,\ y$ 间的关系.

因为新原点在旧坐标系中的坐标是 $(1,\ -3)$. 由移轴公式知道，旧坐标 $(x,\ y)$ 和新坐标 $(x',\ y')$ 之间的关系是
$$x=x'+1,\quad y=y'-3.$$
把上式代入原方程，就得到曲线上一切点的新坐标 x' 和 y' 之间的关系：
$$(y'-3)^2-8(x'+1)+6(y'-3)+17=0,$$
化简后，得
$$y'^2=8x'.$$
这就是所给曲线在新坐标系中的方程. 我们知道，它表示一条抛物线，如图 7-13 所示.

从这个例子可以看到，曲线的方程和坐标系的选择有关，同一曲线在不同的坐标系中具有不同形式的方程．因此，适当选择新的坐标系，可改变曲线的方程，使它化为我们所熟悉的形式，这样就便于掌握曲线的性质．

2．对称轴平行于坐标轴的抛物线　我们现在利用坐标轴的平移，来建立图 7-10 中所示的抛物线的方程．

在图 7-10 中，以抛物线顶点为新坐标系的原点，建立新直角坐标系，如图 7-14 所示．

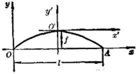


图 7-14

在新坐标系中，抛物线方程应形如

$$x'^2 = -2py'.$$

从图中可以看出，抛物线上一点 A 的新坐标是 $\left(\frac{l}{2},\ -f\right)$．将 A 的新坐标代入方程，得

$$\frac{l^2}{4} = -2p(-f),$$

即

$$2p = \frac{l^2}{4f}.$$

所以桥拱在新坐标系中的方程是

$$x'^2 = -\frac{l^2}{4f}y'. \tag{1}$$

因为新坐标系原点 O' 在旧坐标系中的坐标是 $\left(\frac{l}{2}, f\right)$，所以根据移轴公式有

$$x' = x - \frac{l}{2},$$

$$y' = y - f.$$

代入方程(1)，得

$$\left(x-\frac{l}{2}\right)^2=-\frac{l^2}{4f}(y-f),$$

即

$$y=\frac{4f}{l^2}(lx-x^2). \tag{2}$$

这就是以桥拱一端为坐标原点，对称轴平行于 y 轴的桥拱抛物线方程。

根据方程(2)，算出抛物线上一些点的坐标，列成下面的表格：

x	$0.05l$	$0.10l$	$0.15l$	$0.20l$	$0.25l$	$0.30l$	…
y	$0.19f$	$0.36f$	$0.51f$	$0.64f$	$0.75f$	$0.84f$	…

如果已知 $l=30\,\text{m}$, $f=3\,\text{m}$，那么将 l, f 的数值代入上表，就得到：

x	1.5	3	4.5	6	7.5	9	…
y	0.57	1.08	1.53	1.92	2.25	2.52	…

根据表中一组组数值，在旧坐标系中描点，并用一条平滑的曲线依次将它们连接起来，就可画出桥拱形状(图 7-15)。

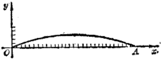


图 7-15

一般来说，如果已知抛物线的顶点在点 (a, b)，焦点参数是 p，对称轴平行于 y 轴，并向上开口，那么在以点 (a, b) 为新坐标系的原点，且坐标轴与旧坐标轴平行的新坐标系内，所给

抛物线的方程是

$$x'^2=2py',$$

把 $x'=x-a$, $y'=y-b$ 代入上面的方程，得

$$(x-a)^2=2p(y-b). \tag{1}$$

这就是所给抛物线在原坐标系中的方程.

同样，我们可以求得以 (a, b) 为顶点，对称轴平行于坐标轴，向下、向右或向左开口的抛物线的方程. 它们顺次是:

$$(x-a)^2=-2p(y-b), \tag{2}$$

$$(y-b)^2=2p(x-a) \tag{3}$$

和

$$(y-b)^2=-2p(x-a). \tag{4}$$

将(1)～(4)式展开，例如展开(1)，(4)两式，分别得

$$x^2-2ax+a^2=2py-2pb,$$

和

$$y^2-2by+b^2=-2px+2pa.$$

移项，得

$$x^2-2ax-2py+a^2+2pb=0,$$

和

$$y^2-2by+2px+b^2-2pa=0.$$

一般地，只含有一个变数的二次项，而另一个变数仅有一次项的二元二次方程，即形如

$$Ax^2+Dx+Ey+F=0$$

或

$$Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

的二元二次方程，都表示抛物线. 我们把它们叫做抛物线型方程.

【例 7】 菜农用水管喷水浇菜，喷出的水流形成抛物线. 如果水流的最高点离地面 3 米，出水口点 O 到最高点的水平距离为 4 米. 以通过点 O 的水平线和铅垂线为 x 轴和 y 轴，写出这股水流的方程.

解：如图 7-16 所示，因为水流抛物线顶点的坐标是(4, 3)，对称轴平行于 y 轴，并且向下开口，所以它的方程是

$$(x-4)^2=-2p(y-3).$$

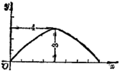


图 7-16

又因为这抛物线经过原点，所以 $x=0$, $y=0$ 应满足上式，就是

$$(0-4)^2=-2p(0-3),$$

$$\therefore\quad 2p=\frac{16}{3}.$$

因此，所求的方程是

$$(x-4)^2=-\frac{16}{3}(y-3),$$

化简得

$$y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{16}x^2.$$

【例 8】 平移坐标轴，化简方程 $2x^2+4x+y+6=0$，并且画出图形。

解：我们可用配方法来解本题．把原方程移项，得

$$2x^2+4x=-y-6,$$

就是

$$x^2+2x=-\frac{y}{2}-3.$$

我们应用类似第二章因式分解中的配方法，使左边配成二项式的平方，得

$$x^2+2x+1=-\frac{y}{2}-3+1,$$

就是

$$(x+1)^2=-\frac{y}{2}-2,$$

也就是

$$(x+1)^2=-\frac{1}{2}(y+4).$$

令 $x+1=x'$, $y+4=y'$，就是按照移轴公式，用 $x=x'-1$，$y=y'-4$ 代入上式，方程就化成

$$x'^2=-\frac{1}{2}y'.$$

我们看到，平移坐标轴，把新坐标系的原点定在 $O'(-1, -4)$，曲线的方程就化成抛物线的标准方程．这抛物线的对称轴平行于 y 轴，向下开口(图 7-17)．

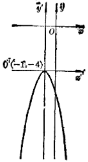


图 7-17

【例 9】 在水库建设中，为了有控制地排泄蓄水，要建造溢洪道．在设计溢洪道时，为了消除水流对闸口地基的冲刷作用，通常采用如图 7-18 所示的建筑．

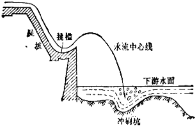


图 7-18

水流经过一段陡坡，流经一条挑槛后，向空中挑射出去，然后落到距离闸口较远的河流中．这样，就可以减小水流对闸口地基的冲刷作用．

为此，需要求出这股水流离开挑槛在空中挑射出去后的运动状态，就是要求出它的运动轨迹．

考虑水流中心线上的一个水质点．以这个质点在挑槛末端出水处所在位置为原点，建立如图 7-19 所示的坐标系．

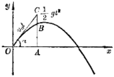


图 7-19

设水质点挑射出去的初速为 v_0，它和 Ox 轴(水平方向)的夹角为 α．并设 t 秒后水质点在 $B(x, y)$．下面我们来分析水质点所在位置的坐标 x 和 y 与时刻 t 之间的关系．如果不考虑重力的作用，那么在时刻 t，水质点应到达点 C，这时 $OC=v_0t$．但实际上，由于受重力的影响，水质点的位置在 B 处．由力学原理知道，相差的这段距离

$$CB=\frac{1}{2}gt^2.$$

因此，在时刻 t，水质点的水平位移是

$$x=OA=v_0t\cos\alpha;$$

水质点到达的高度是

$$y=AB=AC-BC=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2,$$

这里 g 是重力加速度．

在方程

$$x=v_0t\cos\alpha \tag{1}$$

$$y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

中，取不同的时刻 t，就得到相应的点 B 的坐标 x 和 y。这样，动点 B 就描绘出水质点的运动轨迹．因此，(1)，(2) 两式就是水质点的运动方程．

现在我们来消去变量 t，得到 x 和 y 的直接关系式．由 (1) 得

$$t=\frac{x}{v_0\cos\alpha},$$

代入(2)，得

$$y=v_0\sin\alpha\frac{x}{v_0\cos\alpha}-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2,$$

即

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

移项，每项都乘以 $2v_0^2\cos^2\alpha$，且应用关系式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

得

$$gx^2-v_0^2x\sin 2\alpha+2v_0^2y\cos^2\alpha=0.$$

这就是在任一时刻水质点的坐标 x 和 y 所要满足的运动轨迹方程．我们已知道这是抛物线型方程．所以水流经过挑槛在空中挑射出去后的运动轨迹是一条抛物线．

如果 $v_0=12.3$ 米/秒，$\alpha=25°$，那么所求抛物线的方程是

$$9.8x^2-12.3^2\sin 50°\cdot x+2\times 12.3^2\cos^2 25°\cdot y=0,$$

就是

$$9.8x^2-116x+248.5y=0.$$

练习

1. 坐标轴平移后，旧坐标系中的点(2, −1)在新坐标系中的坐标是(−2, 4)．求新坐标系的原点在旧坐标系中的坐标．画出新旧坐标系和这一点．
2. 平移坐标轴，把原点移到 $O'(1, -2)$，求曲线 $y^2-4x+4y+8=0$ 在新坐标系中的方程．
3. 利用坐标轴的平移，化简方程 $x^2+4x-8y-4=0$，并画出新旧坐标

系和这个方程的曲线.

4. 由喷水池喷出的水所成的抛物线，它的焦点参数是 0.1. 如果已知它落在与出口距离 2 米的池内，求喷水的高度.

[1. $(4, -5)$. 2. $y'^2=4x'$. 3. $x'^2=8y'$. 4. 5 米.]

小　结

1. 方程 $x^2=\pm 2py$ 或 $y^2=\pm 2px$ 所表示的曲线叫做抛物线，这些方程叫做抛物线的标准方程.

2. 抛物线 $x^2=2py$ 有一条对称轴 $x=0$ (即 y 轴)，对称轴和抛物线的交点 $(0, 0)$ 叫做抛物线的顶点；抛物线从顶点起向对称轴的两旁无限伸展；点 $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ 叫做抛物线的焦点，p 叫做焦点参数.

3. 平行移动坐标轴，使旧坐标系中的点 (a, b) 为新坐标系的原点，那么同一点的新坐标 (x', y') 和旧坐标 (x, y) 之间的关系是：$x=x'+a$，$y=y'+b$.

4. 对称轴平行于坐标轴，且以 (a, b) 为顶点的抛物线方程是

$$(x-a)^2=\pm 2p(y-b) \text{ 或 } (y-b)^2=\pm 2p(x-a).$$

5. 形如 $Ax^2+Dx+Ey+F=0$ 或 $Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的方程都表示对称轴平行于坐标轴的抛物线.

习　题

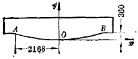
1. 求符合下列条件的抛物线的方程，并画出它们的图形：

(1) 通过点 $(0, 0)$ 和 $(2, -4)$，并且对称于 x 轴；

(2) 通过点 $(0, 0)$ 和 $(2, -4)$，并且对称于 y 轴；

(3) 顶点在原点，焦点是 $F(-4, 0)$.

2. 某车间的吊车梁采用新型的鱼腹结构. 附图中 AOB 鱼腹部分是

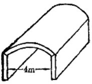


(第 2 题)

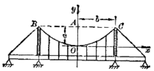
抛物线．求这抛物线的方程．

3．有一雷达的天线是由抛物线绕对称轴旋转而成的曲面．抛物线的焦点和顶点间的距离是 1000 毫米．求这抛物线的方程（以顶点为原点，对称轴为 y 轴）．

4．建造抛物线拱形薄壳屋顶如图所示．已知跨度是 4 米，拱高是跨度的 $\frac{1}{5}$．工人同志施工前要制造模板．试按 1:50 画出这拱形．



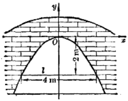
（第 4 题）



（第 5 题）

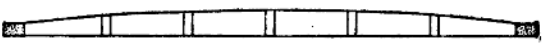
5．如图，悬桥的链，形状近似抛物线．如果链的垂度 $OA=a$，而跨度 $BC=2b$，试按图中指定的坐标系写出链的方程．

6．如图是抛物线形拱桥．当桥洞下水面的宽为 $l=4\text{m}$ 时，拱顶离水面 2 米．如果水面下降 1 米，水面宽多少？



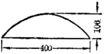
（第 6 题）

7．建造一条 12 米宽的大道，矢跨比（拱高和拱宽的比）设计为 2.5%．筑路工人用等距的五条路桩支撑抛物线形路面的断面，如图所示．已知中间的一条路桩的长度是 0.6 米，求其余四条路桩的长．



(第 7 题)

8. 北方冬季地基施工，常利用反射电炉烤热冻土层．反射电炉的反射面是抛物线绕对称轴旋转而成的曲面，发热器放在抛物线的焦点．一个反射电炉的截面尺寸如图所示(单位：厘米)，发热器应放在什么地方?



(第 8 题)

9. 抛物线的焦点是$(-2, 3)$，顶点是$(3, 3)$，求它的方程，并用平移坐标轴的方法化为标准方程．画出新旧坐标系和曲线．

10. 求抛物线$2y^2+x+4y+6=0$的顶点和焦点的坐标．

11. 设吊桥的桥索下垂成抛物线形，桥索两端各离水面20米，两端的水平距离是80米，桥索中点(即抛物线的顶点)离水面6米．以桥索所在平面内的水平线为x轴，经过桥索中点的铅垂线为y轴，求桥索的方程．

第二节　二次函数

一、二次函数的意义和图象

在上节的例9中我们知道，溢洪道的水流从挑槛挑射出去后，中心线上水质点的坐标之间具有下列关系：

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

对于水质点的一个确定的横坐标x，必有一个确定的纵坐标y和它对应．这个关系式表明了水质点的纵坐标随着横坐标的变化而变化的规律．亦即水质点纵坐标y是横坐标x的函数．

在这样的函数关系中，自变量最高的次数是二次．这种

函数叫做二次函数．在实际问题中，我们经常遇到二次函数．

例如半径是 r 的圆，它的面积 S 是用下面的公式来表示的：

$$S=\pi r^2,$$

这里 S 是 r 的二次函数．

物理学中所讨论的匀加速运动是一种变速运动，但每秒钟所增加的速度（就是加速度）是一个常量．物体在匀加速运动中，它离开一个定点 O 的距离 s 是用下面的公式来表示的：

$$s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0,$$

这里 a 是加速度，v_0 是初速度，s_0 是物体开始运动时离开定点 O 的距离，它们都是常量；s 是时间 t 的二次函数．

二次函数的一般形式是

$$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0).$$

把上面的二次函数的一般形式写成

$$ax^2+bx-y+c=0,$$

可以看出，这是抛物线型方程，所以二次函数的图象是抛物线．

【例 1】 画函数 $y=2x^2-3x-5$ 的图象．

解：计算 x 和 y 的对应值如下表：

x	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	9	0	-5	-6	-3	4	15	…

按上表描点，即可画出如图 7-20 的抛物线．

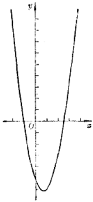


图 7-20

直接用描点法画二次函数的图象，

只能粗略地显示一个轮廓．有时需要具体知道所画抛物线的顶点的坐标，我们可利用上一节平移坐标轴的方法求得．

例如为求抛物线

$$y=2x^2-3x-5$$

的顶点的坐标，同上节例8一样，先移项，得

$$2x^2-3x=y+5,$$

就是

$$x^2-\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}.$$

然后配方，

$$x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}+\frac{9}{16},$$

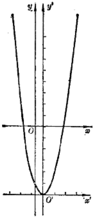


图 7-21

得到

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{2}\left(y+\frac{49}{8}\right).$$

令 $x=x'+\frac{3}{4}$, $y=y'-\frac{49}{8}$. 上式变成以点 $\left(\frac{3}{4},-\frac{49}{8}\right)$ 为原点的新坐标系中的方程

$$x'^2=\frac{1}{2}y'.$$

计算 x' 和 y' 的对应值，列表如下：

x'	0	±1	±2	…
y'	0	2	8	…

然后在新坐标系中描点，即可画出如图 7-21 所示的抛物线．

因为这抛物线的顶点就是新坐标系的原点，所以它在原坐标系中的坐标就是 $\left(\frac{3}{4},-\frac{49}{8}\right)$.

练习

画函数 $y=-x^2-3x+2$ 的图象，并求出顶点的坐标。

二、二次函数的极值

在上例中我们看到，函数

$$y=2x^2-3x-5$$

的图象是向上开口的抛物线，顶点 $\left(\frac{3}{4},\ -\frac{49}{8}\right)$ 是图象上的最低点．因此，当 $x=\frac{3}{4}$ 时，y 取得它可能取得的一切值中最小的值（简称极小值）$-\frac{49}{8}$.

一般地说，如果二次函数的图象是向上开口的抛物线，那么当自变量 x 的值等于顶点的横坐标时，函数取得极小值．

同样，如果二次函数的图象是向下开口的抛物线，那么顶点是图象上的最高点．当自变量 x 的值等于顶点的横坐标时，函数取得它所能取得的一切值中最大的值（简称极大值）．

二次函数的极小值和极大值总起来叫做二次函数的极值．

因为二次函数的极值与它的图象顶点的坐标密切相关，所以我们来一般地求二次函数

$$y=ax^2+bx+c$$

的图象的顶点．

先移项，得

$$ax^2+bx=y-c,$$

就是

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)=y-c.$$

配方，得

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)=y-c+\frac{b^2}{4a},$$

就是

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=y-\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

令

$$x'=x+\frac{b}{2a},\quad y'=y-\frac{4ac-b^2}{4a},$$

得

$$ax'^2=y',$$

即

$$x'^2=\frac{1}{a}y'.$$

可以看出，

$$y=ax^2+bx+c$$

所表示的抛物线的顶点在$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，而且当 $a>0$ 时，曲线向上开口；当 $a<0$ 时，曲线向下开口。

由此可知，函数

$$y=ax^2+bx+c$$

当

$$x=-\frac{b}{2a}$$

时，取得极值. 如果 $a>0$，抛物线向上开口，取得的是极小值；如果 $a<0$，抛物线向下开口，取得的是极大值. 这个极值总是

$$y_{极值}=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

事实上，当自变量 x 取 $-\frac{b}{2a}$ 时，这时的函数值就是极值.

【例 2】 求二次函数 $y=3x^2+12x+7$ 的极值.

解：这里 $a=3$，$b=12$，所以当

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{2\times3}=-2$$

时，有

$$y_{极值}=3(-2)^2+12(-2)+7=-5.$$

因为 $a=3>0$，所以求得的极值是极小值.

【例 3】 某生产队要造猪棚，在围墙材料一定的情况下，各边取多少长，才能使面积最大.

解：我们分两种情况来讨论.

(1) 只造一间(图 7-22).

材料一定，也就是猪棚的周长 P 为定长. 设这间猪棚的长为 x 尺，那么宽是 $\frac{P-2x}{2}$ 尺. 面积

$$S=\frac{P-2x}{2}x=\frac{P}{2}x-x^2.$$

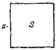


图 7-22

这是一个二次函数. 现在要求当 x 取什么值时 S 达到最大. 这里 $a=-1$，$b=\frac{P}{2}$. 所以当

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{\frac{P}{2}}{2}=\frac{P}{4}(\text{尺})$$

时，

$$S_{极大}=\frac{P}{2}\cdot\frac{P}{4}-\left(\frac{P}{4}\right)^2$$
$$=\frac{P^2}{8}-\frac{P^2}{16}=\frac{P^2}{16}(\text{平方尺})\quad(\because a<0).$$

这间猪棚的宽是

$$\frac{P-2x}{2}=\frac{P-2\frac{P}{4}}{2}=\frac{P}{4}(\text{尺}).$$

可见，只造一间猪棚，在周长一定的情况下，取

$$长:宽=\frac{P}{4}:\frac{P}{4}=1:1$$

即正方形时面积最大.

(2) 造一排相同的 n 间(图 7-23).

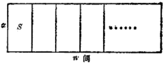


图 7-23

n 间猪棚的周长 P 仍为定长. 设每间长 x 尺，那么宽是

$$\frac{P-(n+1)x}{2n}\text{尺}.$$

面积

$$S=\frac{P-(n+1)x}{2n}x=\frac{Px}{2n}-\frac{n+1}{2n}x^2.$$

这仍是一个二次函数. 当

$$x=\frac{\frac{P}{2n}}{2\cdot\frac{n+1}{2n}}=\frac{P}{2(n+1)}(\text{尺})$$

时，

$$S_{最大}=\frac{P}{2n}\cdot\frac{P}{2(n+1)}-\frac{n+1}{2n}\cdot\left[\frac{P}{2(n+1)}\right]^2$$

$$=\frac{P^2}{8n(n+1)}(\text{平方尺}).$$

每间猪棚的宽是

$$\frac{P-(n+1)x}{2n}=\frac{P-(n+1)\frac{P}{2(n+1)}}{2n}=\frac{P}{4n}(\text{尺}).$$

可见，造一排相同的 n 间猪棚，用相同数量的材料，每间取

$$长:宽=\frac{P}{2(n+1)}:\frac{P}{4n}=2n:(n+1)$$

时，面积最大．例如一排造 12 间猪棚，每间取长:宽 $=24:13$ 时面积最大．

练习

求下列函数的极值：

(1) $y=3-2x+x^2$;　　　　(2) $y=-2x^2-4x+5$.

[(1) 极小值 2;　(2) 极大值 7.]

小　结

1．由 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 所确定的函数叫做二次函数．

2．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是抛物线．当 $a>0$ 时，向上开口；当 $a<0$ 时，向下开口．

3．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时有极值．如果 $a>0$，函数有极小值；如果 $a<0$，函数有极大值．

习　题

1．画下列函数的图象：

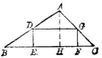
(1) $y=(x-1)^2-2$;　　　　(2) $y=x^2+2x+3$.

2．已知抛物线通过 $A(-2, 0)$，$B(0, 0)$ 和 $C(1, -3)$ 三点，它的轴平行于 y 轴．求这抛物线的方程，并画出图象．（提示：在形如 $y=ax^2+bx+c$ 的抛物线方程中，把已知点的坐标代入，然后求 a，b 和 c．）

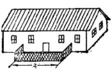
3．求下列各抛物线的顶点的坐标，对称轴的方程和开口的方向：

(1) $y=-\frac{1}{3}x^2-2x-5$;　　　　(2) $y=3x^2-5x$.

4．木材厂的工人要将一批同样形状的三角形零星木板锯成长方形（如图）．已知三角形木板底边 BC 的长是 2 尺，高 AH 是 1.6 尺．怎样的锯法才能使废弃的材料最少？



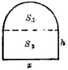
(第 4 题)



(第 5 题)

5. 某生产队要用篱笆围成长方形的养鸡场地，如果篱笆只能总长 60 尺，一边利用房屋的墙壁(附图)，那么各边取多少长才能使场地的面积最大？

6. 设在墙上要开一个上部为半圆，下部为长方形的窗户．在窗框的长度一定的情况下，长方形的宽与高的比应是多少，才能使空气流通最畅？



(第 6 题)

7. 生产队要造猪棚，一边利用已有的墙壁．在棚舍周长一定的情况下，每间的长与宽之比为多少时，才能使面积最大？(分一间和一排 n 间两种情况讨论．)

第三节　一元二次方程

一、一元二次方程的意义

在上一节关于二次函数的极值问题中，我们讨论了自变量 x 取什么值时，二次函数

$$y=ax^2+bx+c$$

取得它的极大值或极小值．

在三大革命运动的实践中，我们还常遇到另一类实际问题．在二次函数

$$y=ax^2+bx+c$$

中，需要找出自变量 x 取什么值时，y 取得某一特定值．我们来看下面一个例子：

某生产队需要开挖一条水渠，根据流量要求，设计水渠横断面的面积为22.5平方米，渠底宽3米，坡比为1:1.5．那么水渠的深应为几米(图7-24)？

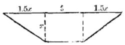


图 7-24

设水渠的深为x米．根据坡比为1:1.5的要求，可得水渠的宽为

$$2\times1.5x+3=3x+3.$$

由梯形的面积公式，得横断面的面积y为

$$y=\frac{1}{2}(3x+3+3)x=\frac{3}{2}x^2+3x.$$

这说明水渠的横断面面积y是深度x的二次函数．

根据题意，我们要找出使y为22.5平方米的x的值，即

$$\frac{3}{2}x^2+3x=22.5.$$

这是含有一个未知数x的等式，并且未知数最高的次数是二次．这样的等式叫做一元二次方程．上面的方程可以改写成

$$x^2+2x-15=0.$$

一元二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq0).$$

把一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

同二次函数

$$y=ax^2+bx+c \tag{2}$$

相比较，不难看出，在(2)中使二次函数y为零的自变量x的值，就是一元二次方程(1)的解．为了求得一元二次方程的解，我们可以用画图象的方法．从图象上看，二次函数(2)的图象与x轴的交点的横坐标，就是一元二次方程的解．

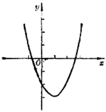


图 7-25

例如一元二次方程

$$x^2-2x-2=0$$

的解，就是二次函数

$$y=x^2-2x-2$$

当 y 等于零时，自变量 x 的值．因为二次函数

$$y=x^2-2x-2$$

经配方后得

$$(x-1)^2=(y+3).$$

它是以 $(1,\ -3)$ 为顶点，向上开口的抛物线(图 7-25)．从图象中可以看出，它与 x 轴交点的横坐标大约是 -0.7 和 2.7．因为此时 $y=0$．所以 $x\approx0.7$ 和 $x\approx2.7$ 就是原方程的解．

二、一元二次方程的解法

用画图象的方法所得一元二次方程的解，不太精确，下面我们介绍一元二次方程的解法．

【例 1】 解下列方程：

(1) $x^2-16=0$; (2) $5x^2+6x=0$.

解：对以上这类方程，可以用分解因式的方法来解．

(1) 原式可分解为

$$(x-4)(x+4)=0.$$

这样，方程的左边是两个因式的积，而右边是零．

我们知道，如果两个因数的积等于零，$mn=0$，那么 m 和 n 至少有一个等于零，即 $m=0$ 或 $n=0$．相反，如果 m 和 n 中有一个等于零，$m=0$ 或 $n=0$，那么，它们的乘积一定是零，即 $mn=0$．

因此，满足方程

$$(x-4)(x+4)=0$$

的 x 值，必定使得

$$x-4=0 \quad 或 \quad x+4=0.$$

所以原方程的解是

$$x_1=4, \quad x_2=-4.$$

(2) 在方程 $5x^2+6x=0$ 中，左边分解因式，得

$$x(5x+6)=0,$$

因此，

$$x=0 \quad 和 \quad 5x+6=0$$

的解就是原方程的解，即

$$x_1=0, \quad x_2=-\frac{6}{5}$$

【例 2】 解本节开头求水渠深的方程．$x^2+2x-15=0$.

解：我们把原方程配方．移项，得

$$x^2+2x=15.$$

配方后，得

$$x^2+2x+1=15+1,$$

就是

$$(x+1)^2=16.$$

这样，我们就可以用开平方的方法，求得

$$x+1=\pm 4.$$

因此原方程有两个解：

$$x_1=4-1=3; \quad x_2=-4-1=-5.$$

根据实际问题，所求的是水渠深，负数不合题意，舍去．所以水渠深应为 3 米．

在解这个问题时，我们把方程

$$x^2+2x-15=0$$

进行配方，然后求解．这样的方法叫做配方法．

【例 3】 解方程：$3x^2+4x-7=0$.

解：原方程可以写做

$$x^2+\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}=0.$$

移项，得

$$x^2+\frac{4}{3}x=\frac{7}{3}.$$

配方后，得

$$x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}=\frac{7}{3}+\frac{4}{9},$$

就是

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9}.$$

即

$$x+\frac{2}{3}=\pm\frac{5}{3}.$$

因此原方程有两个解

$$x_1=-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=1;\quad x_2=-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}=-\frac{7}{3}.$$

把配方法推广到一般，就得到解一元二次方程的公式法.

方程

$$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0)$$

可以化成

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

移项，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方后，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2},$$

就是

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

如果 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geqslant 0$，也就是如果 $b^2-4ac\geqslant 0$，那么根据平方根的性质，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

就是

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

因此，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这样，我们导出了求一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

的解的公式．对于一般的一元二次方程，只要把方程的各项系数代入公式，就能够求出方程的解．

【例 4】 应用公式解方程：$5x^2+3x-1=0$．

解：这里，$a=5$，$b=3$，$c=-1$．因此

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 5\times(-1)}}{2\times 5}=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{10};$$

就是

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{29}}{10};$$

$$x_2=\frac{-3-\sqrt{29}}{10}.$$

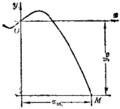


图 7-26

【例 5】 本章第一节例 9 中溢洪道排流轨迹方程是

$$9.8x^2-116x+248.5y=0,$$

如果水流射出时的初始位置与下游水位的高差是 $y_m=13\,\text{m}$，

求水流的水平射程 x_m(图 7-26).

解: 根据题意, 水流射入水面的点 M 的坐标 (x, y) 中, $x=x_m$, $y=y_m=-13$, 代入原方程, 有

$$9.8x_m^2-116x_m-3230.5=0.$$

解这个一元二次方程, 得

$$x_m=\frac{116\pm\sqrt{116^2+4\times9.8\times3230.5}}{2\times9.8}$$

$$=\frac{116\pm374.3}{19.6}.$$

就是

$$x_{m1}=\frac{116+374.3}{19.6},$$

$$x_{m2}=\frac{116-374.3}{19.6}.$$

x_{m2} 是负数, 不合题意, 所以舍去, 得

$$x_m=25.$$

即水流的水平射程是 25 米.

【例 6】 有一条上半部是半圆, 下半部是长方形的污水渠道, 它的横截面如图 7-27 所示. 根据排泄污水的需要, 要求渠道的横截面是 3.88 平方米. 求上部半圆的半径(精确到 0.01 米).

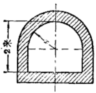


图 7-27

解. 设半圆的半径为 x 米, 那么上部半圆的面积是 $\frac{\pi x^2}{2}$ 平方米, 下部长方形的面积是 $2x(2-x)$ 平方米.

根据问题所给的条件, 可列出方程

$$\frac{\pi x^2}{2}+2x(2-x)=3.88.$$

取 $\pi=3.14$，代入并化简后，得

$$0.43x^2-4x+3.88=0,$$

应用公式，解得

$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times0.43\times3.88}}{2\times0.43}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{4-0.43\times3.88}}{0.43}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{2.3316}}{0.43}\approx\frac{2\pm1.527}{0.43}.$$

$$\therefore\quad x_1=8.20,\quad x_2=1.10.$$

x_1 不合题意，舍去．所以渠道上部半圆的半径应是 1.10 米．

根据一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的求解公式：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

可以知道：

当 $b^2-4ac=0$ 时，x_1 和 x_2 是两个不相等的实数，即方程有两个不相等的实数解；

当 $b^2-4ac=0$ 时，$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$，即方程有两个相等的实数解；

当 $b^2-4ac<0$ 时，由于在实数范围内，负数不能开平方，所以方程没有实数解．

上面的讨论表明，根据 b^2-4ac 的值，可以判定一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的解的情况，我们把

$$D=b^2-4ac$$

叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解的判别式.

【例 7】 判别下列方程的解的性质：

(1) $3x^2+4x-4=0$;　　　(2) $9x^2+4=12x$;

(3) $5(x^2+2)-7x=0$.

解：(1) $D=4^2-4\times3\times(-4)=16+48>0$,

所以这个方程有两个不相等的实数解.

(2) 这个方程就是 $9x^2-12x+4=0$,

$$D=(-12)^2-4\times9\times4=144-144=0,$$

所以这个方程有两个相等的实数解.

(3) 这个方程就是 $5x^2-7x+10=0$,

$$D=(-7)^2-4\times5\times10=49-200<0,$$

所以这个方程没有实数解.

小　结

1. 形如 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的方程叫做一元二次方程.
2. 一元二次方程可用配方法或公式法来解.
3. 方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的解是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

其中 $D=b^2-4ac$ 叫做根的判别式. 当 $D>0$ 时，方程有两个不相等的实数解；当 $D=0$ 时，方程有两个相等的实数解；当 $D<0$ 时，方程没有实数解.

习　题

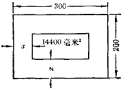
1. 分别用配方法和公式法解方程 $2x^2-3x-5=0$.
2. 解下列方程：

(1) $3x^2+5x-2=0$;　　(2) $1\frac{1}{3}x^2-4x=2\frac{1}{2}$;

(3) $\sqrt{2}x^2-4\sqrt{3}x-2\sqrt{2}=0$;

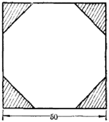
(4) $(3x-1)(x+2)=20$.

3. 在制造某种规格变压器的硅钢片时，要把一块长为300毫米，宽为200毫米的长方形硅钢片，从中间去掉一块面积为14400平方毫米的长方形，并使四周剩下的边一样宽．求这个宽度．



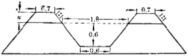
(第3题)

4. 红旗农具厂的工人师傅要把一批截面为正方形的钢料，在四角截去同样大小的等腰直角三角形，加工成截面为正八边形的工件(如图)．如果正方形的边长是50毫米，求加工后正八边形工件每边的长．



(第4题)

5. 农村开挖灌溉渠时，先筑成一条梯形的地基，然后再从中挖土，堆放在渠道两边作渠堤．有一条渠道尺寸如图(单位:米)所示．为了使于放样施工，试求堆土的高和底宽．



(第 5 题)

6．毛主席早就深刻地指出："**地主剥削的方式，主要地是收取地租，此外或兼放债，或兼雇工，或兼营工商业。**"解放前的某一年，贫农王阿根一家辛勤劳动，收得的粮食大部分给地主搜括去；又遇春荒断粮，逼得向地主借了3斗米．可是利上滚利，两年后地主竟要王阿根还7斗8升．我们来算这笔剥削账，两年中地主放高利贷的年利率是多少(精确到1%)？

(提示：设年利率是 x，一年后的本利是 $3(1+x)$，两年后的本利是 $3(1+x)^2$．)

7．当 k 是什么数时，下列方程有两个相等的实数解．

(1) $(x-1)^2=kx$；　　(2) $x^2-9+k(x+3)=0$．

第八章　圆、椭圆和双曲线

第一节　圆

一、圆 的 方 程

在以前各章中，我们已不止一次地谈到有关圆的问题，并介绍过它的一些性质．为了进一步掌握圆的某些性质，我们将导出它在直角坐标系中的方程，并根据方程用代数方法来讨论．

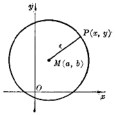


图 8-1

设点 $P(x, y)$ 是以点 $M(a, b)$ 为圆心，r 为半径的圆上任意一点（图 8-1），那么从点 P 到点 M 的距离应等于 r，就是

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$

两边平方，得

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

这就是所给的圆的方程．

现在我们来平移坐标轴，把原点移到 (a, b)．利用移轴公式

$$x=x'+a, \quad y=y'+b,$$

代入原方程，得

$$x'^2+y'^2=r^2.$$

它就是以原点为圆心，r 为半径的圆的方程.

【例 1】 求圆心在点 $(-4, 3)$，半径是 6 的圆的方程.

解. 所求的圆的方程是

$$(x+4)^2+(y-3)^2=6^2,$$

就是

$$x^2+8x+16+y^2-6y+9=36,$$

整理后，得

$$x^2+y^2+8x-6y-11=0.$$

【例 2】 画出方程 $4x^2+4y^2+24x-16y+43=0$ 的图形.

解：原方程可化为

$$x^2+y^2+6x-4y+\frac{43}{4}=0.$$

将常数项移到右边，并且对左边进行配方，得

$$x^2+6x+9+y^2-4y+4=-\frac{43}{4}+9+4$$

就是

$$(x+3)^2+(y-2)^2=\frac{9}{4}.$$

所以原方程表示以点 $(-3, 2)$ 为圆心，$\frac{3}{2}$ 为半径的一个圆. 它的图形如图 8-2 所示.

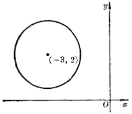


图 8-2

现在，一般地考虑下列二元二次方程所确定的曲线：

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0. \quad (1)$$

把(1)式改写成

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0,$$

经过移项配方后，得

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}.$$

当 $D^2+E^2-4AF>0$ 时，方程(1)是以点 $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$ 为圆心，以 $\frac{1}{2A}\sqrt{D^2+E^2-4AF}$ 为半径的圆的方程.

当 $D^2+E^2-4AF=0$ 时，方程 (1) 所确定的图形只有一点 $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$，叫做点圆.

当 $D^2+E^2-4AF<0$ 时，方程(1)就不表示任何曲线.

【例 3】 证明圆 $x^2+y^2-18x+45=0$ 和直线 $y=\frac{4}{3}x-2$ 相切，并求切点的坐标.

解：在第六章中我们知道，两条直线的方程所组成的方程组的解，就是这两条直线交点的坐标. 同样，圆和直线的方程所组成的方程组的解，就是这条直线和圆的交点的坐标. 它们一般有两个解. 当两个解相等时，表明直线和圆相交于一点，即它们相切. 这个解就是切点的坐标. 现在我们来解上面的圆和直线的方程所组成的方程组：

$$\begin{cases} y=\frac{4}{3}x-2, & (1) \\ x^2+y^2-18x+45=0. & (2) \end{cases}$$

这是由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组，一般可以用代入法来解. 即将一个未知数用另一个未知数的代数式来表示，将这个代数式代入另一方程，消去一个未知数，得到一个一元二次方程. 解这个一元二次方程，将所得结果代入上面的代数式，就可以得到两组解. 具体步骤如下：

以(1)代入(2)，得

$$x^2+\left(\frac{4}{3}x-2\right)^2-18x+45=0,$$

整理后，得

$$25x^2-210x+441=0.$$

这是一个一元二次方程．用公式法解这个方程，得

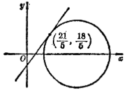


图 8-3

$$x=\frac{210\pm\sqrt{210^2-4\times25\times441}}{2\times25},$$

就是

$$x_1=x_2=\frac{21}{5}.$$

将 x 的值代入(1)，得

$$y_1=y_2=\frac{18}{5}.$$

因为所得的两组解相同，所以已知直线和已知圆只有一个公共点，也就是它们相切于点 $\left(\frac{21}{5},\ \frac{18}{5}\right)$，如图 8-3 所示．

练习

1. 判别下列各点在圆 $x^2+y^2=25$ 的里面？外面？还是在圆上？并说明理由：

(1) $(1,\ -2)$；　(2) $(-3,\ -4)$；　(3) $(-5,\ 7)$．

2. 画出下列各方程的图形(先求出圆心和半径)：

(1) $x^2+y^2+5x-7y+\frac{5}{2}=0$；　(2) $2x^2+2y^2+5x-3y-2=0$．

3. 求直线 $3x+y-13=0$ 与圆 $x^2+y^2=25$ 的交点．

[2　(1) $\left(-\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}\right)$，$r=4$；　(2) $\left(-\frac{5}{4},\ \frac{3}{4}\right)$，$r=\frac{5\sqrt{2}}{4}$．

3．$(4.8,\ -1.4)$，$(3,\ 4)$．]

二、找圆心

我们知道，圆心决定圆的位置，半径决定圆的大小．因此要画圆或者画圆弧，首先要确定圆心．下面介绍两种找圆心的方法．

1. 三点法　在测绘生产队的平面图时，对较大的圆形粪池，因池的中心不能插标竿，所以不能直接测得它的圆心．那么怎样把这个圆形的地物准确地标在平面图上呢？贫下中农先在粪池边上选 A, B, C 三点立标竿，并在小平板仪的图纸上测得对应点 A', B', C'（图 8-4）．然后再过 A', B', C' 画圆．现在的问题是：如何由三点来找出圆心画圆？

假定 O 是所求圆的圆心，根据同圆半径相等的性质，那么

$$OA' = OB' = OC'.$$

要使 $OA' = OB'$，根据垂直平分线的性质，点 O 必定在 $A'B'$ 的垂直平分线上；要使 $OB' = OC'$，点 O 又必定在 $B'C'$ 的垂直平分线上．所以点 O 必定是这两条垂直平分线的交点．因此可以这样找圆心并画圆：

(1) 连接 $A'B'$, $B'C'$，分别画 $A'B'$, $B'C'$ 的垂直平分线，这两条线的交点 O 就是圆心．

(2) 以 O 为圆心，以 O 到 A', B', C' 中任一点的距离为半径画圆（图 8-4）．

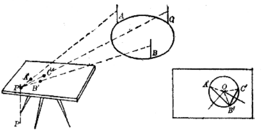


图 8-4

从这个例子中，可以知道：弦的垂直平分线经过圆心．因此，两弦垂直平分线的交点必为圆心，所以过不在一条直线上的三点可以画一个圆．

在机械制造中，当精度要求不高时，为了加工方便，有时用圆弧来代替其他曲线的一段，而这个代用圆弧，又往往必须通过曲线上的三个已知点．这样，就需要通过三个已知点的坐标来求圆的圆心、半径和方程．

【例4】 在钢球无级变速器中，有一个零件叫调速蜗轮（图 8-5）．蜗轮上有六条对称排列着的凹槽，凹槽的中心线原设计为等速螺线（曲线的一种，将在下一章内介绍）．现在为了加工的方便，改用圆弧近似地来代替．如果已知一条等速螺线上的三个点为 $A(74,\ 0)$，$B(0,\ 44)$ 和 $C(41,\ 41)$，试求出圆弧 $\widehat{ACB}$ 的圆心 O_1 的坐标和半径 r_1．

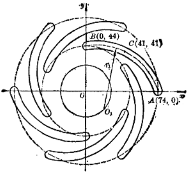


图 8-5

解：我们先求圆弧 $\widehat{ACB}$ 所在圆的方程，然后求出圆心坐标和半径．假定所求圆的方程是

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

那么已知三点 A、B, C 的坐标应满足这个方程，就是将它们的坐标分别代入方程，等式成立．即有

$$74^2+74D+F=0,$$
$$44^2+44E+F=0,$$
$$41^2+41^2+41D+41E+F=0.$$

整理后，得

$$\begin{cases}74D+F=-5476, & (1)\\ 44E+F=-1936, & (2)\\ 41D+41E+F=-3362. & (3)\end{cases}$$

这是以 D, E, F 为未知数的两个二元一次方程和一个三元一次方程所组成的三元一次方程组. 和二元一次方程组一样，我们也可以用消元法来解.

先消去 F, 把它化为 D, E 的二元一次方程组.

(1) − (2)，得

$$74D-44E=-3540, \qquad (4)$$

(3) − (2)，得

$$41D-3E=-1426. \qquad (5)$$

解(4)，(5)组成的方程组，得

$$D\approx-33, \quad E\approx24.$$

将它们代入(2)，得

$$F=-2993.$$

所以所求圆的方程是

$$x^2+y^2-33x+24y-2993=0.$$

经配方，得

$$(x-16.5)^2+(y+12)^2=58.4^2.$$

所以圆弧 $\overset{\frown}{ABC}$ 的圆心 O_1 的坐标是 $(16.5, -12)$，半径是 $r_1=58.4$.

2. 角尺法　木工师傅常用角尺找圆心. 先把角尺的直角顶点紧靠圆形工件的边缘，角尺的两边与圆形工件的边缘

交于 A, B 两点(图 8-6). 过 A 和 B 画一直线. 然后把角尺转过一个角度, 使角尺的直角顶点仍在圆形工件的边缘上, 角尺的两边与圆形工件边缘交于 C, D 两点. 过 C, D 又画一直线. 两直线相交于 O. O 就是所求的圆心.

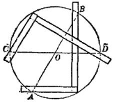


图 8-6

为什么这样作出的点 O 就是圆心呢?

我们把顶点在圆周, 并且两边与圆周相交的角叫做圆周角. 下面我们来证明: 直径所对的圆周角是直角.

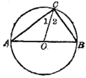


图 8-7

如图 8-7 所示, 在圆 O 中, AB 是直径, $\angle ACB$ 是圆周角. 连接 CO, 显然

$$OA=OC=OB,$$

所以 $\triangle AOC$ 和 $\triangle COB$ 都是等腰三角形, 因此有 $\angle A=\angle 1$, $\angle B=\angle 2$, 即

$$\angle 1+\angle 2=\angle A+\angle B.$$

又

$$\because \quad \angle 1+\angle 2+\angle A+\angle B=180^\circ \text{(为什么?)}$$

$$\therefore \quad \angle 1+\angle 2+\angle 1+\angle 2=180^\circ$$

$$\therefore \quad \angle 1+\angle 2=90^\circ$$

即直径所对的圆周角是直角. 反过来, 如果圆周角是直角, 那么它所对的弦必是直径.

因此, 由于上述找圆心过程中所画的 AB, CD 都是直径, 所以它们的交点是圆心.

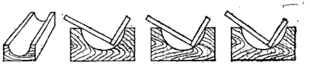
练习

1. 如图是皮带轮的碎块. 为配制这个轮子,怎样画出它的轮廓图?

2. 求过三个已知点 $A(8,-2)$, $B(6,-6)$ 和 $C(-1,-5)$ 的圆的圆心和半径.

3. 工厂里浇铸圆轴的模子,是由两个半圆形槽合成的. 工人师傅常用角尺来检验模子是不是半圆形. 附图的三种情况中,哪种情况是合格的,并说明道理.

(第1题)



(第3题)

[2. $(3,-2)$, $r=5$.]

三、等分圆周

在生产中,常常要在圆形工件上钻几个均匀分布的孔,这就要把一个圆周分成长度相等的几段弧. 圆周被等分后,顺次连接圆周上的各个分点,可得到一个顶点在圆周上,各边相等,各角也相等的多边形,简称圆内接正多边形. 所以画正多边形,也要用到等分圆周. 下面介绍几种常用的等分圆周法:

1. 利用量角器　当圆周被 n 等分后,每一段弧所对的圆心角都等于 $\frac{360^\circ}{n}$ (图 8-8). 因此,要把一个圆周分成 n 等分,可先用量角器在圆内画一个等于 $\frac{360^\circ}{n}$ 的圆心角. 以这一圆心角所对的弦长为半径,顺次在圆周上截弧,即可截取 n 次

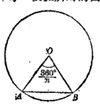


图 8-8

而无剩余，从而把圆周分成n等分。

2. 利用等分圆周表　如图8-9所示，设圆O的直径是d，AB是圆内接正n边形的一边，画$OC \perp AB$，那么

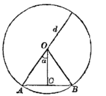


图 8-9

$$\angle\alpha=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n}$$

$$=\frac{180^\circ}{n}.$$

$$AB=2AC=2OA\sin\alpha=2\cdot\frac{d}{2}\sin\frac{180^\circ}{n}=d\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

如果用a_n表示圆内接正n边形的一边AB，用k_n（叫做直径系数）表示$\sin\frac{180^\circ}{n}$，那么

$$a_n=k_nd.$$

不同的n所对应的k_n，可查等分圆周表：

等分圆周表

等分数 n	直径的系数 k_n	等分数 n	直径的系数 k_n	等分数 n	直径的系数 k_n
		11	0.2818	21	0.1490
		12	0.2588	22	0.1423
3	0.8660	13	0.2394	23	0.1361
4	0.7071	14	0.2224	24	0.1305
5	0.5878	15	0.2079	25	0.1253
6	0.5000	16	0.1951	26	0.1204
7	0.4339	17	0.1837	27	0.1161
8	0.3827	18	0.1737	28	0.1119
9	0.3420	19	0.1645	29	0.1080
10	0.3090	20	0.1564	30	0.1045

当知道了圆的直径 d 和等分数 n 时，查上表中 k_n 的值，就能求出相邻两个分点间的距离 a_n.

【例 5】 试在稻麦两用脱粒机的花盘上，找出直径为 444 毫米的圆周上的十四个等分点(图 8-10).

解：查《等分圆周表》，当 $n=14$ 时，$k_n=0.2224$，代入公式 $a_n=k_nd$，得

$$a_{14}=0.2224\times444$$
$$=98.75(\text{毫米}).$$

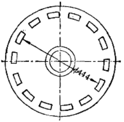


图 8-10

以 98.75 毫米的长为半径，顺次在直径为 444 毫米的圆周上截弧，就得到十四个分点.

3. 利用圆规和直尺 对于某些特殊的等分数，利用圆规和直尺就能等分圆周.

(1) 四等分圆周：只要画出 $\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$ 的圆心角. 因此，画互相垂直的两条直径，它们与圆周的四个交点，就是四个等分点(图 8-11).

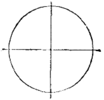


图 8-11

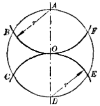


图 8-12

(2) 六等分圆周：半径为 r 的圆内接正六边形一边的长

$$a_6=2r\sin\frac{180^\circ}{6}=2r\sin30^\circ=2r\cdot\frac{1}{2}=r.$$

因此，分别以一条直径的两个端点为圆心，r 为半径，画两条弧与圆相交，那么所得的四个交点，连同直径的两个端点，就是六等分圆周的六个等分点(图 8-12)．

(3) 十等分圆周：我们先分析一下，半径为 r 的圆内接正十边形的边长是多少．

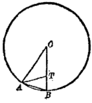


图 8-13

在图 8-13 中，已知圆 O 的半径 $OA=OB=r$，AB 是内接正十边形的一边．

因为等腰三角形 AOB 的顶角

$$\angle AOB=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ,$$

所以

$$\angle OAB=\angle OBA=\frac{180^\circ-36^\circ}{2}=72^\circ.$$

画 $\angle OAB$ 的平分线交 OB 于 T，那么

$$\angle OAT=\angle TAB=\frac{72^\circ}{2}=36^\circ.$$

因此，$\triangle OTA$ 是等腰三角形，就是说，

$$OT=AT.$$

又因

$$\angle ATB=\angle OAT+\angle AOT=36^\circ+36^\circ=72^\circ,$$

所以 $\triangle ABT$ 也是等腰三角形，就是说，

$$AT=AB$$

由此可知，

$$\triangle OAB\backsim\triangle ABT,$$

因而

$$OB:AB=AB:BT,$$

就是

$$AB^2=OB\cdot BT.$$

已知 $OB=r$，

$$\because BT=OB-OT=OB-AB=r-AB,$$

$$\therefore\quad AB^2=r(r-AB).$$

这是关于 AB 的一元二次方程. 解这个方程，得

$$AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r.$$

因此，半径为 r 的圆内接正十边形的边长等于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$.

根据以上的分析，可得到十等分圆周的画法如下：

如图 8-14，在圆 O 中画互相垂直的直径 KL 和 MN. 取 ON 的中点 P 为圆心，以 PK 为半径，画弧交 OM 于 Q. 那么 OQ 就是圆内接正十边形的一边.

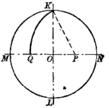


图 8-14

事实上，设圆 O 的半径为 r，那么 $OP=\frac{1}{2}r$. 在直角三角形 OPK 中，

$$PK=\sqrt{OK^2+OP^2}=\sqrt{r^2+\left(\frac{1}{2}r\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}r,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad OQ&=PQ-OP=PK-OP\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}r-\frac{1}{2}r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r.\end{aligned}$$

所以用 OQ 的长去截圆周，可顺次截取十次而没有剩余，得到圆周上的十个等分点.

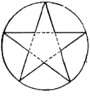
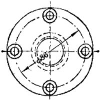


图 8-15

把十等分圆周的十个分点每隔一点取一点，即可得到五等分圆周的五个分点. 把五个分点每隔一个如图 8-15 所示那样连接起来，就可以画出我们伟大祖国国旗上的五角星.

练习

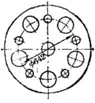
1．附图是万能铣床上的内齿轮平面图，在直径为 86 毫米的圆上有四个等距离的孔．试画出各孔中心的位置．



（第 1 题）

2．用直径为 50 毫米的圆钢锉出一个正六边形．要使废料最少，正六边形的边长应该是多少？

3．附图是内燃机中一个零件的平面图．在直径为 642 毫米的圆周上，钻有五个大孔和五个小孔，这十个孔的中心是均匀分布的．怎样画出各孔中心的位置？



（第 3 题）

［2．25 毫米．］

四．直线与圆弧、圆弧与圆弧的连接

许多机械零件的轮廓图是由直线段和圆弧所构成的．例如收割机上三星板的轮廓（图 8-16*），就是由四条圆弧和两

* 在视图上，半径尺寸前要加字母 R．

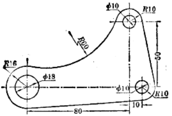


图 8-16

条直线段所构成．这些线条的接头处，必须由一线条平滑地过渡到另一线条，形成直线与圆弧或圆弧与圆弧的连接．

1．直线与圆弧的连接　当直线与圆相切时，直线在切点处平滑地过渡到圆弧．在这种情形下，我们说直线与圆弧在切点处连接．下面介绍几种直线与圆弧连接的画法．

(1) 画直线连接已知圆弧上的一点．

【例 6】　画如图 8-17 的鼓风机外壳轮廓图，已知它的圆形部分的半径为 r．

解：如图 8-18，以 O 为圆心，画半径为 r 的弧 AB，与一条直径交于点 A．过 A 作 $AC\perp OA$，那么 AC 就连接 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 A．其余部分可根据要求画出．

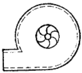


图 8-17

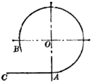


图 8-18

由第一章我们知道，过半径的端点且垂直于半径的直线是圆的切线．从以上画法可以看出，AC 是圆 O 上过点 A 的

切线．所以画直线连接已知圆弧于已知点，只要过已知点画弧的切线就可以了．

(2) 过圆外一点画直线连接已知圆弧．这就是要过圆外的一点，画直线与已知圆相切．如图 8-19 所示，根据圆的切线与圆只有一个公共点这一特征，可将直尺一端的边缘靠近 A，使另一端的边缘和圆只有一个接触点 B，画出 AB．AB 就是圆的切线．同样可以画另一条切线 AC．

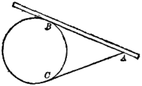


图 8-19

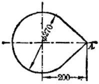


图 8-20

【例 7】 图 8-20 是稻麦两用收割机分禾装置上的鸡心盖板．落料时怎样在钢皮上划线？

解：画直径为 270 毫米的圆和互相垂直的直径；定出点 A．过点 A 画圆的两条切线．划线便完成了．

(3) 画直线连接两条已知圆弧．在生产实际中，我们还

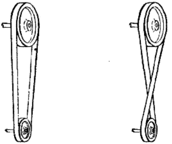


图 8-21

常看到一条直线和两个圆都相切的情况．例如皮带轮的皮带与两个轮子都相切(图 8-21)，这样的直线叫做两个圆的公切线．公切线又分两种：当两圆在公切线的同旁时，这条公切线叫做外公切线，如图 8-22 的 AB 和 $A'B'$；当两圆在公切线的两旁时，这条公切线叫做内公切线，如图 8-23 的 CD 和 $C'D'$．

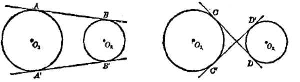
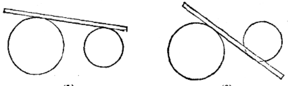


图 8-22　　　　图 8-23

画直线连接两条已知圆弧，就是画两个圆的公切线．公切线可用直尺画出．先将直尺边缘靠近两圆，经过调整，使它分别与两圆只有一个接触点，然后沿直尺边缘画出直线．这直线就把两条弧连接起来了(图 8-24)．



(1)　　　　(2)

图 8-24

【例 8】　图 8-25 是水泵压盖的视图．试按 1:20 画出这图．

画图步骤由读者自己叙述．

(4) 画圆弧连接两条平行线．

【例 9】　某体育场的环形跑道，是在两平行线 AB, CD

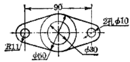


图 8-25

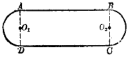


图 8-26

的两端分别用半圆弧连接而成的. 已知 $AB=CD=80\,\mathrm{m}$, AB, CD 间的距离是 30 米. 试按 1:1000 画出这个环形跑道.

解: 如图 8-26, 画长方形 $ABCD$, 使 $AB=80\,\mathrm{mm}$ (80 米的千分之一), $BC=30\,\mathrm{mm}$. 求出 AD, BC 的中点 O_1, O_2. 分别以 O_1 和 O_2 为圆心, AD 和 BC 为直径画半圆. 那么 $\overset{\frown}{AD}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 就是与两平行线 AB 和 BC 相连接的圆弧.

(5) 画已知半径的圆弧连接两条不平行的直线: 如图 8-27, 要画出半径等于已知长 r 的圆弧, 使它与不平行的两直线 l_1 和 l_2 都相切. 很明显, 所画圆弧的圆心必在与 l_1 的距离等于 r 的平行线 l_1' 上, 也在与 l_2 的距离等于 r 的平行线 l_2' 上, 所以就是 l_1' 与 l_2' 的交点. 分别画与 l_1, l_2 相平行且相距为 r 的直线 l_1' 和 l_2', 以它们的交点 O 为圆心, 以 r 为半径, 就可以画出所要求的圆弧.

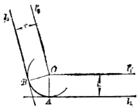


图 8-27

【例 10】 按 1:1 画出图 8-28(1) 所示薄板零件的轮廓图.

解: 如图 8-28(2), 先画边框三角形 ABC. 分别画与直线 AB 和 AC 距离为 10 毫米的平行线. 以它们的交点 O 为圆心, 10 毫米为半径画圆弧, 连接边框三角形的两边. 轮廓

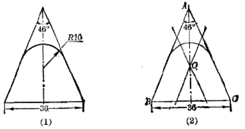


图 8-28

图就完成了.

2. 圆弧与圆弧的连接　在生产实际中,还会遇到圆和圆相切的问题. 两个圆只有一个公共点,就叫做两圆相切,公共点叫做切点,连接两个圆心的直线叫做连心线.

两个圆相切, 如果其中的一个在另一个的外面[图8-29(1)], 叫做外切; 如果其中的一个在另一个的里面[图8-29(2)],叫做内切.

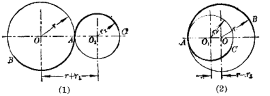


图 8-29

当两圆相切时, 一条圆弧就在切点上平滑地过渡到另一条圆弧, 形成圆弧与圆弧的连接. 在外切的情形下, 叫做外连接; 在内切的情形下, 叫做内连接.

从图 8-29 可以看出, 两圆相切, 它们的连心线必经过切点; 并且

当两圆外切时，圆心间的距离 $OO_1=r+r_1$;

当两圆内切时，圆心间的距离 $OO_1=r-r_1$.

掌握了相切两圆圆心间的距离，我们就能正确地画出圆弧与圆弧连接的图形.

(1) 画已知半径的圆弧连接一条已知圆弧.

【例 11】 画出图 8-30 所示的摇手柄.

解: 摇手柄是轴对称图形，可先画一条中心线 MN，并画出图形的一半.

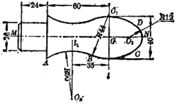


图 8-30

因为 $\overset{\frown}{BC}$ 的半径是 44 毫米，而摇手柄最宽处的宽度是 40 毫米，所以 $\overset{\frown}{BC}$ 所在圆的圆心到 MN 的距离是 $44-20=24\,\text{mm}$. 在 MN 上取一点 G，过 G 画直线 $l\perp MN$，截取 $GO_1=24\,\text{mm}$，得到 $\overset{\frown}{BC}$ 的圆心 O_1.

因为 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 外连接，所以

$$O_1O_2=50+44=94\,\text{mm}.$$

又已知 O_2 到 l 的距离是 35 毫米，画和 l 平行且相距 35 毫米的直线 l_1. 再以 O_1 为圆心，以 94 毫米为半径画弧交 l_1 于 O_2，O_2 就是 $\overset{\frown}{AB}$ 所在圆的圆心.

因为 $\overset{\frown}{CD}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 内连接，所以

$$O_1O_3=44-12=32\,\text{mm}.$$

以 O_1 为圆心，以 32 毫米为半径画弧交 MN 于 O_3，O_3 就是

$\widehat{CD}$ 所在圆的圆心.

以 O_1, O_2, O_3 为圆心,分别以 44 毫米, 50 毫米, 12 毫米为半径画三条圆弧,就得到摇手柄下半部的曲线部分.

最后按设计要求画直线部分, 并利用对称性画出上半部的图形.

(2) 画已知半径的圆弧连接两条已知圆弧.

【例 12】 画出图 8-31 所示零件的轮廓图.

解: 按图注尺寸要求,定出圆心 O_1 和 O_2, 并分别画直径为 30 毫米和 20 毫米的圆. 设 O 是所要画的 $\widehat{AB}$ 所在圆的圆心. 因圆 O 分别与圆 O_1 和圆 O_2 外切,所以

$OO_1=12.5+15=27.5\,\mathrm{mm}$,

$OO_2=12.5+10=22.5\,\mathrm{mm}$.

分别以 O_1 和 O_2 为圆心, 以 27.5 毫米和 22.5 毫米为半径画弧, 那么两弧的交点就是连接弧的圆心 O. 以 O 为圆心, 12.5 毫米为半径, 就可以画出 $\widehat{AB}$ 分别与圆 O_1 和圆 O_2 外连接. 最后利用对称性,画出下半部的图形,完成轮廓图.

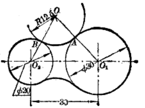
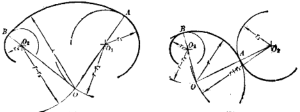


图 8-31



(1) (2)

图 8 32

用类似的方法，可以画出已知半径的圆弧，使它和两条已知圆弧内连接，如图 8-32(1) 所示；或者和一条已知圆弧外连接而和另一条已知圆弧内连接，如图 8-32(2) 所示.

在实际应用中，有时还要求我们求出两圆弧连接点的坐标. 我们来看下面的例题：

【例 13】 上海Ⅰ型机动插秧机上秧爪滑道（图 8-33）的中心线，是由许多段圆弧和直线连接而成的. 为了计算秧爪的运动轨迹，需要求出圆弧连接处的坐标. 图 8-34 所示的是其中的两段圆弧：$\widehat{AB}$ 是以 $O_1(-30,\ -8.5)$ 为圆心，$r_1=189.927$ mm 为半径的圆弧；$\widehat{BC}$ 是以 $O_2(17,\ 5.8)$ 为圆心，$r_2=140.8$ mm 为半径的圆弧. 试计算连接点 B 的坐标.

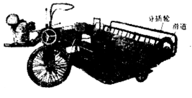


图 8-33

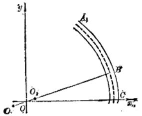


图 8-34

解：根据题意，$\overset{\frown}{AB}$ 所在圆的方程是

$$(x+30)^2+(y+8.5)^2=189.927^2, \qquad (1)$$

$\overset{\frown}{BC}$ 所在圆的方程是

$$(x-17)^2+(y-5.8)^2=140.8^2. \qquad (2)$$

$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 的连接点 B 就是两圆的交点，因此只要解(1)、(2)两个方程所组成的方程组就可以了。

将方程(1)，(2)整理后得

$$\begin{cases} x^2+y^2+60x+17y-35100=0, & (3) \\ x^2+y^2-34x-11.6y-19502=0. & (4) \end{cases}$$

这是由两个二元二次方程所组成的方程组，可以通过两个方程的两边分别相减来消去二次项。

(3) − (4)，得

$$94x+28.6y-15598=0,$$

就是

$$y=\frac{15598-94x}{28.6},$$

即

$$y=545.385-3.287x. \qquad (5)$$

这个方程与原方程组中任何一个方程所组成的方程组的解，就是原方程组的解。例如我们解(5)与(4)所组成的方程组：

$$\begin{cases} y=545.385-3.287x, \\ x^2+y^2-34x-11.6y-19502=0. \end{cases}$$

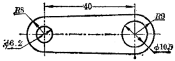
仿照例3的步骤，解这个方程组，得到

$$x_1\approx x_2=151.7,$$
$$y_1\approx y_2=46.7.$$

即两圆相交于一点，说明它们相切(内切)，$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 的连接点，也就是切点 B 的坐标是(151.7, 46.7)。

练习

1．下图是农业机械上的短拉杆摇臂．按 1:1 画出图样来。



（第 1 题）

2．说出图 8-32 的画法步骤．

小　　结

1．以点(a, b)为圆心，r 为半径的圆的方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

当圆心在坐标原点时，圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$.

2．方程 $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$ 表示一个圆，或者一点，或者不表示任何图形．

3．不在一直线上的三点确定一个圆．

4．直径所对的圆周角是直角．

5．直径为 d 的圆内接正 n 边形的边长是 $a_n=d\sin\dfrac{180°}{n}$；特别是：$a_6=R$, $a_{10}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

6．利用"过半径的端点，垂直于半径的直线是圆的切线"和"切线与圆只有一个公共点"等性质，可以画以下各种直线与圆弧的连接：

(1) 画直线连接已知圆弧于弧上的一点；

(2) 过圆外一点画直线连接已知圆弧；

(3) 画直线连接两条已知圆弧；

(4) 画圆弧连接两条平行线；

(5) 画已知半径的圆弧连接两条不平行的直线．

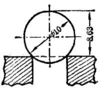
7．利用两圆相切时圆心距 $OO_1=r+r_1$（外切），或 $OO_1=r-r_1$（内切）的性质，可以画以下各种圆弧与圆弧的连接：

(1) 画已知半径的圆弧连接一条已知圆弧；

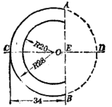
(2) 画已知半径的圆弧连接两条已知圆弧。

习　题

1. 一圆通过两点 $(1,\ 3)$ 和 $(5,\ -3)$，并且圆心在直线 $y=2x-10$ 上，求这圆的方程.
2. 车制小圆孔后，不能用内卡来检验小孔的直径，可用钢珠来测量. 如图把直径 10 毫米的钢珠放在小孔上面，量得钢珠顶端与工件端面间的距离是 8.63 毫米. 求工件上小孔的直径.



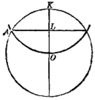
(第 2 题)



(第 3 题)

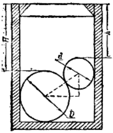
3. 某一零件的图形和尺寸如附图所示. 为了加工的需要，试算出弦 AB 的长.
4. 已知三角形的三个顶点是 $A(-1,\ 3)$，$B(0,\ 2)$ 和 $C(1,\ -1)$. 求经过这三角形的三个顶点的圆的方程.
5. 如图，画圆 O 的任一半径 OK，再画 OK 的垂直平分线 LA 交圆 O 于 A. 验证 AL 近似于圆 O 的内接正七边形的一边.

(提示：直径为 d 的圆内接正七边形一边的长是 $a_7=d\sin\dfrac{180°}{7}$.)



(第 5 题)

6. 口小内大的深圆孔零件，它的内径不能用卡钳测量，通常用钢珠来测量. 如图把直径为 D 和 d 的钢珠放入孔中，用深度千分尺测得两钢珠顶端到孔顶的距离分别是 H 和 h. 试根据这四个数据求深孔的直径 D_0.

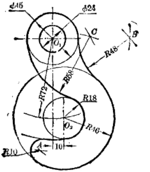


(第 6 题)

7. 以已知长为半径画圆弧，使它和一条已知圆弧在弧上的已知点外连接.

8. 按 1:2 画出图 8-16 所示的三星板图.

9. 画出附图所示的吊钩轮廓图.



(第 9 题)

第二节 椭 圆

一、椭 圆

1. 椭圆的标准方程 行星绕太阳运动的轨道是椭圆；人造地球卫星运行的轨道也是椭圆；在机械工业上，有很多零件的轮廓线是椭圆形的.

工人师傅在木板上画椭圆常用如下的方法：取一条长度一定的线，把它的两端固定在两点 F 和 F' 处(图 8-35)，用笔尖把这条线拉紧，使笔尖运动一周，就可以画出一个椭圆.

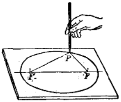


图 8-35

从上面的画法可以看出，椭圆上任何一点 P 到两个定点 F 和 F' 的距离之和都等于定长，即所用的那条线的长.

我们把在平面内到两个定点的距离之和等于定长的点的轨迹叫做椭圆，两个定点叫做它的焦点.

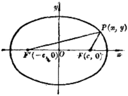


图 8-36

下面我们来导出椭圆的方程.

取经过焦点 F 和 F' 的直线为 x 轴，线段 $F'F$ 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系(图 8-36).

设两个焦点间的距离是 $2c$ $(c>0)$，那么 F 和 F' 的坐标分别是 $(c, 0)$ 和 $(-c, 0)$.

又设点 $P(x, y)$ 是椭圆上的任意一点，它到两个定点 F

和 F' 的距离之和是定长 $2a(a>0)$，即

$$PF+PF'=2a,$$

根据两点间的距离公式，

$$PF=\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

同理，

$$PF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

为了化去这个式子里的根号，先移项，得

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

两边平方

$$(x-c)^2+y^2=(2a)^2-2\times 2a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2,$$

整理后得

$$a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

两边再平方，整理后得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

两边都除以 $a^2(a^2-c^2)$，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

这就是所求椭圆的方程.

为了把这个方程化成更整齐的形式，我们先来观察一下 $\triangle PFF'$. 由于三角形两边的和大于第三边，所以在 $\triangle PFF'$ 中，

$$2a>2c,$$

即

$$a>c.$$

因此，a^2-c^2 是一个正数. 令 $a^2-c^2=b^2\ (b>0)$，代入上述椭圆方程，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad (a>b>0).$$

这个方程叫做椭圆的标准方程.

如果焦点 F, F' 在 y 轴上, 并以 F, F' 的垂直平分线为 x 轴, 即假定两个焦点的坐标分别是 $(0, c)$ 和 $(0, -c)$, 又动点到两个焦点的距离之和仍设为 $2a$, 那么同样可以求得椭圆的方程:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b>0),$$

其中 $b^2=a^2-c^2$ (图 8-37). 这个方程也是椭圆的标准方程.

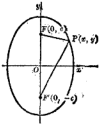


图 8-37

2. 椭圆的形状　下面我们根据椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

进一步讨论椭圆的形状.

(1) 在方程 (1) 中, 当 $y=0$ 时, $x=\pm a$; 当 $x=0$ 时, $y=\pm b$. 所以这椭圆交 x 轴于 $A(a, 0)$ 和 $A'(-a, 0)$ 两点, 交 y 轴于 $B(0, b)$ 和 $B'(0, -b)$ 两点. A, A', B, B' 四点叫做椭圆的顶点 (图 8-38). 不难看出, 线段 $A'A$ 的长是 $2a$, 线段 $B'B$ 的长是 $2b$, 并且 $A'A>B'B$. 我们把焦点所在的线段 $A'A$ 叫做长轴, 它的一半叫半长轴; 另一条线段 $B'B$ 叫做短轴, 它的一半叫半短轴. 两轴的交点叫做椭圆的中心.

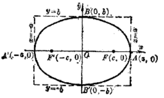


图 8-38

(2) 在方程(1)中, 如果以 $-x$ 代替 x, 方程不变, 也就是椭圆上有点 (x, y), 那么 $(-x, y)$ 也在这椭圆上. 这说明椭圆

关于短轴对称．同样，以 $-y$ 代替 y，或者以 $-x$，$-y$ 代替 x，y，方程都不变．这就是说，椭圆关于长轴和中心都是对称的．

(3) 由方程(1)可得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

从以上两个式子可以知道，当 $|x|\leqslant a$ 时，y 才有实数值；当 $|y|\leqslant b$ 时，x 才有实数值．因此，这椭圆是在四条直线 $x=a$，$x=-a$，$y=b$ 和 $y=-b$ 所围成的长方形内，见图 8-38．

(4) 从图 8-38 还可以看出，椭圆的半短轴 b 和半长轴 a 的比值 $\frac{b}{a}$ 愈小，椭圆就愈扁平．

由 $b^2=a^2-c^2$ 得

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}.$$

我们把 $\frac{c}{a}$ 叫做椭圆的离心率，通常用 e 来表示．于是

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2},$$

因为 $c<a$，所以椭圆的离心率 $e<1$．

从 $\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}$ 可以看出，当 e 的值愈接近于 1 时，$\frac{b}{a}$ 的值愈接近于 0，椭圆愈扁平；当 e 的值愈接近于 0 时，$\frac{b}{a}$ 的值愈接近于 1，椭圆就愈接近于圆．

当 $e=0$ 时，$a=b$，椭圆的标准方程变成 $x^2+y^2=a^2$，这就是圆了．所以圆可以看作是两轴一样长的椭圆．

【例 1】 画出椭圆 $16x^2+25y^2=400$，并求它的长轴和短轴的长，焦点和顶点的坐标。

解：把所给的方程化为标准方程．各项除以 400，得

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1. \tag{1}$$

所以 $a=5$，$b=4$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3$．

因此，这个椭圆的长轴的长是 $2a=10$；短轴的长是 $2b=8$；两个焦点是 $F(3,0)$ 和 $F'(-3,0)$；四个顶点是 $A(5,0)$，$A'(-5,0)$，$B(0,4)$ 和 $B'(0,-4)$．

由方程(1)，得

$$y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}.$$

根据这个关系式，在 $|x|\leqslant 5$ 的范围内，算出几组 x 和 y 的对应值，如下表：

x	1	2	3	4
y	±3.9	±3.7	±3.2	±2.4

按照上表描点，并利用椭圆的对称性，就可以画出如图 8-39 所示的椭圆．

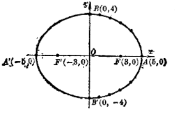


图 8-39

【例 2】 已知椭圆的中心在原点，焦点在 y 轴上，它的长轴是短轴的 2 倍，并且通过点 $(4,6)$，求这椭圆的方程，并画出图形。

解：设所求的椭圆的方程是

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

因为这椭圆通过点(4, 6)，所以这点的坐标满足上面的方程，即

$$\frac{16}{b^2}+\frac{36}{a^2}=1. \qquad (1)$$

又已知

$$a=2b, \qquad (2)$$

把(2)代入(1)，得

$$\frac{16}{b^2}+\frac{36}{4b^2}=1. \qquad (3)$$

解方程(3)，得

$$b^2=25.$$

即

$$b=\pm 5.$$

因为 $b>0$，所以取

$$b=5.$$

代入(2)，得

$$a=10.$$

因此，所求椭圆的方程是

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1.$$

根据这个方程，可画出如图 8-40 所示的椭圆.

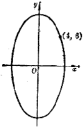


图 8-40

在熟悉了椭圆的标准方程后，如果遇到形如

$$Ax^2+Cy^2=K$$

的二元二次方程，其中 A，C 和 K 的符号相同，那么我们可以肯定这方程表示一个椭圆，因为它可以化成

$$\frac{x^2}{\frac{K}{A}}+\frac{y^2}{\frac{K}{C}}=1$$

的形式. 还可以知道，当 $\frac{K}{A}>\frac{K}{C}$ 时，这方程表示焦点在 x 轴

上的椭圆；当 $\frac{K}{A}<\frac{K}{C}$ 时，这方程表示焦点在 y 轴上的椭圆.

【例3】 我国于1971年3月3日发射了第二颗人造地球卫星. 已知在卫星运行的椭圆轨道上，近地点离地面266公里，远地点离地面1826公里. 地球的半径是6370公里. 地球的中心位于卫星运行椭圆轨道的一个焦点上. 选取近地点和远地点的连线为 x 轴，并使 y 轴通过椭圆轨道的中心，求轨道的方程.

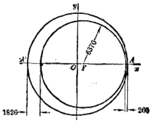


图 8-41

解. 如图8-41，近地点到地球中心的距离

$$AF=6370+266=6636\text{(公里)};$$

远地点到地球中心的距离

$$A'F=6370+1826=8196\text{(公里)}.$$

而

$$AF=OA-OF=a-c,$$

$$A'F=OA'+OF=a+c.$$

就是

$$\begin{cases}a-c=6636,\\ a+c=8196.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}a=7416,\\ c=780.\end{cases}$$

$$\therefore\quad b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{7416^2-780^2}=7375.$$

因此，我国发射的第二颗人造地球卫星的运行轨道方程是

$$\frac{x^2}{7416^2}+\frac{y^2}{7375^2}=1.$$

3. 椭圆的参数方程　已知椭圆的长轴 $2a$ 和短轴 $2b$，可利用圆规和直尺画出这个椭圆。下面介绍这种画法：

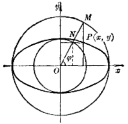


图 8-42

以原点 O 为圆心，分别以 a 和 b 为半径，画两个同心圆（图 8-42）。过圆心 O 任意画一条射线，分别交大圆于 M，交小圆于 N。过 M 作直线平行于 y 轴；过 N 作直线平行于 x 轴。设这两直线相交于点 $P(x, y)$，并设射线与 x 轴的正向的交角为 φ。这时点 P 的横坐标就是点 M 的横坐标 $x=a\cos\varphi$；点 P 的纵坐标就是点 N 的纵坐标 $y=b\sin\varphi$。

当角 φ 变动时，点 P 的坐标

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi, & (1)\\ y=b\sin\varphi & (2)\end{cases}$$

也随着变动。令角 φ 由 0 变到 2π，求出动点 P 的一系列的位置，然后用平滑的曲线把这些点连接起来。

我们来证明，点 P 的轨迹是椭圆。

事实上，由

$$\frac{x}{a}=\cos\varphi,\qquad \frac{y}{b}=\sin\varphi,$$

可得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi,$$

就是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

所以用上面所讲的方法画出的点，在这个方程所确定的椭圆上.

由此可知，长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆，也可用两个方程(1)和(2)来表示. 象这种用第三个变数来表示 x 和 y 的方程叫做参数方程，第三个变数称为参数. 方程(1)，(2)就是椭圆的参数方程，其中 φ 是参数.

上一章飞机空投物体的轨迹方程

$$\begin{cases} x=vt, \\ y=\dfrac{1}{2}gt^2; \end{cases}$$

溢洪道水质点挑射的方程

$$\begin{cases} x=v_0t\cos\alpha, \\ y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases}$$

都是以 t 为参数的抛物线参数方程，将 t 消去，就得到一般的抛物线方程.

练习

1. 已知两焦点间的距离为 6 厘米，动点到两焦点的距离之和为 8 厘米，用工人师傅拉线的方法画椭圆.
2. 如果上题中的椭圆的中心在原点，焦点在 x 轴上，求这个椭圆的方程.
3. 求下列各椭圆的半长轴和半短轴的长、焦点的坐标和离心率，并画出它们的图形：

   (1) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$；　　(2) $25x^2+9y^2=100$；

   (3) $x^2+25y^2=25$；　　(4) $2x^2=1-y^2$.
4. 已知椭圆的长轴和短轴分别等于 12 厘米和 9 厘米，用圆规和直尺画出这个椭圆.

[2. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$. 3. (1) $a=10$, $b=6$, $(8,0)$, $(-8,0)$, $e=\dfrac{4}{5}$;

(2) $a=\frac{10}{3}$, $b=2$, $\left(0,\ \frac{8}{3}\right)$, $\left(0,\ -\frac{8}{3}\right)$, $e=\frac{4}{5}$; (3) $a=5$, $b=1$, $(2\sqrt{6},\ 0)$, $(-2\sqrt{6},\ 0)$, $e=\frac{2\sqrt{6}}{5}$; (4) $a=1$, $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.]

二、坐标轴的旋转

在第七章中我们已经看到，利用坐标轴的平移，能使曲线的方程化为新坐标系中较简单的，并且是我们所熟悉的方程.

除了平移坐标轴外，还可以旋转坐标轴，构成新的坐标系.

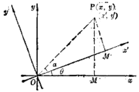


图 8-43

设 Ox 和 Oy 是原来的坐标轴，将原坐标轴绕原点 O 按逆时针方向旋转 θ 角后，形成新的坐标轴 Ox' 和 Oy'，如图 8-43 所示.

设点 P 是坐标平面上的任意一点，它在旧坐标系中的坐标是 $(x,\ y)$，在新坐标系中的坐标是 $(x',\ y')$. 画 $PM\perp Ox$, $PM'\perp Ox'$. 设 $\angle M'OP=\alpha$. 那么

$$\begin{aligned} x=OM&=OP\cos(\alpha+\theta)\\ &=OP(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)\\ &=OP\cos\alpha\cos\theta-OP\sin\alpha\sin\theta. \end{aligned}$$

但

$$OP\cos\alpha=OM'=x',$$

$$OP\sin\alpha=M'P=y'.$$

$$\therefore\quad x=x'\cos\theta-y'\sin\theta.$$

同样，

$$\begin{aligned} y=MP&=OP\sin(\alpha+\theta)\\ &=OP(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)\\ &=OP\sin\alpha\cos\theta+OP\cos\alpha\sin\theta. \end{aligned}$$

仍以 $OP\cos\alpha=x'$, $OP\sin\alpha=y'$ 代入，得

$$y=y'\cos\theta+x'\sin\theta.$$

因此，在坐标轴按逆时针方向旋转 θ 角后，以点 P 的新坐标 $(x',\ y')$ 表示它的旧坐标 $(x,\ y)$ 的转轴公式是

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta. \end{cases}$$

如果把(I)式中的第一式乘以 $\cos\theta$，第二式乘以 $\sin\theta$，再相加，那么有

$$x\cos\theta+y\sin\theta=x'(\cos^2\theta+\sin^2\theta),$$

就是

$$x'=x\cos\theta+y\sin\theta.$$

把(I)式中的第一式乘以 $-\sin\theta$，第二式乘以 $\cos\theta$，再相加，那么有

$$-x\sin\theta+y\cos\theta=y'(\sin^2\theta+\cos^2\theta),$$

就是

$$y'=-x\sin\theta+y\cos\theta.$$

这样，我们又得到以点 P 的旧坐标 $(x,\ y)$ 表示它的新坐标 $(x',\ y')$ 的转轴公式：

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} x'=x\cos\theta+y\sin\theta,\\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta. \end{cases}$$

【例 4】 如果将坐标轴绕着原点按逆时针方向旋转 60°，点 $P\ (1,\ \sqrt{3})$ 的坐标将变成什么？

解：这里，已知点的旧坐标是 $x=1$，$y=\sqrt{3}$；坐标轴转过的角 $\theta=60°$．把它们代入转轴公式(II)，得到这点的新坐标

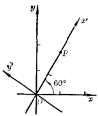


图 8-44

$$x'=1\cos 60°+\sqrt{3}\sin 60°$$

$$=1\times\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2,$$

$$y'=-1\sin 60°+\sqrt{3}\cos 60°$$

$$=-1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=0.$$

所以点 P 的新坐标是 (2, 0)，参看图 8-44．

练习

1. 把坐标轴绕着原点按逆时针方向旋转 45° 后，某点在新坐标系中的坐标是 (2, −1)．求这点在旧坐标系中的坐标．
2. 已知曲线的方程是 $5x^2-6xy+5y^2=32$．将坐标轴绕着原点按逆时针方向旋转 45°，求这曲线在新坐标系中的方程．

(提示：以 $\theta=45°$，应用公式(I)代入方程．)

[1. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　2. $x'^2+4y'^2=16$.]

三、多边形切削的数学原理

作为转轴公式在车工实践中的一种应用，下面介绍多边形切削的数学原理．

过去加工多边形工件，一般都使用刨床和铣床，加工效率跟不上生产发展的需要．工人同志遵照毛主席关于“独立自主、自力更生”的教导，发扬了敢想敢干的革命精神，经过反复实践，把普通车床进行简单改革，成功地创造了多边形切削专用机床．这种机床结构简单，使用方便，生产效率高，一般工厂都可自行改装．

我们以车削正方形为例，来说明这种机床的工作原理．如图 8-45 所示，把刀盘夹紧在车头上；工件由卡盘夹持，使工件的轴线平行于刀盘的轴线．加工时利用齿轮系统，使刀盘的旋转带动工件作相同方向的旋转，并使刀盘与工件转速的比是 2:1(图 8-46)．

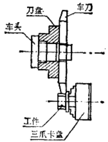


图 8-45

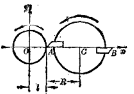


图 8-46

当刀盘在同一直径的两端装上两把车刀时，工件就能被切削成近似的正方形．为了从理论上证实这一点，我们来看刀尖在工件所在的平面上运动的轨迹．

在图 8-46 中，O 表示工件中心的位置，C 表示刀盘中心的位置，刀尖到刀盘中心的距离为 R，它到工件中心的距离为 l．取工件的中心 O 为原点，直线 OC 为 x 轴，建立直角坐标系．并设切削开始时，刀尖 A 和 B 都在 x 轴上．

现在来看切削过程中某一瞬时的情况．设想坐标系 Oxy 随同工件按逆时针方向旋转了角 α，到达坐标系 $Ox'y'$ 的位置(图 8-47)．这时 CA 在坐标系 Oxy

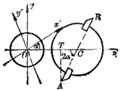


图 8-47

中绕中心 C 旋转了 2α 的角.

先求点 A 在坐标系 Oxy 中的坐标. 画 AT 垂直 Ox. 那么

$$x=OT=OC-TC=R+l-R\cos 2\alpha=2R\sin^2\alpha+l,$$

$$y=TA=-R\sin 2\alpha=-2R\sin\alpha\cos\alpha.$$

再求点 A 在坐标系 $Ox'y'$ 中的坐标. 由于坐标系 $Ox'y'$ 是坐标系 Oxy 按逆时针方向转过角 α 而得到的, 所以将 $x=2R\sin^2\alpha+l$, $y=-2R\sin\alpha\cos\alpha$ 和 $\theta=\alpha$ 代入转轴公式 (II):

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha, \end{cases}$$

就可得到点 A 在坐标系 $Ox'y'$ 中的新坐标

$$x'=(2R\sin^2\alpha+l)\cos\alpha-2R\sin^2\alpha\cos\alpha=l\cos\alpha,$$

$$\begin{aligned} y'&=-(2R\sin^2\alpha+l)\sin\alpha-2R\sin\alpha\cos^2\alpha \\ &=-(2R+l)\sin\alpha. \end{aligned}$$

这两个式子指出刀尖 A 在坐标系 $Ox'y'$ 中的位置. 它们也就是刀尖 A 在坐标系 $Ox'y'$ 中的运动轨迹的参数方程, 以 α 为参数.

为消去 α, 将上两式两边分别平方, 得

$$\frac{x'^2}{l^2}=\cos^2\alpha,$$

$$\frac{y'^2}{(2R+l)^2}=\sin^2\alpha.$$

两式等号两边分别相加, 即得

$$\frac{x'^2}{l^2}+\frac{y'^2}{(2R+l)^2}=1.$$

由此可见, 刀尖 A 在工件所在平面上的运动轨迹是一个

椭圆，它的半长轴是 $2R+l$，半短轴是 l，并且长轴在坐标轴 Oy' 上(图 8-48)。

用同样的方法，可以求出刀尖 B 在工件所在平面上的运动轨迹，也是一个椭圆，它的方程是

$$\frac{x'^2}{(2R+l)^2}+\frac{y'^2}{l^2}=1.$$

它与刀尖 A 的运动轨迹的差别仅在于长轴落在坐标轴 Ox' 上。

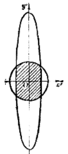


图 8-48

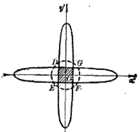


图 8-49

随着进刀的过程，刀尖与工件中心的距离 l 逐渐缩短，于是工件的外形便切削成近似的正方形。在图 8-49 中我们看到，切削后工件的轮廓线 $DEFG$ 是由四段椭圆弧所围成，并不是真正的正方形。但是当刀尖到刀盘中心的距离 R 比起 l 来大得多，也就是椭圆的长短轴相差很大时，这两个椭圆就很扁平，这四段弧就相当平直，以致在实用上可以看作是正方形的四条边了。

按照同样的道理，如果刀盘上装上三把车刀，并且使它们彼此间隔 120°，刀盘与工件的转速的比仍为 2:1，那么工件就

被切削成近似的正六边形．如图 8-50 所示．

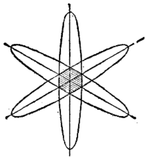


图 8-50

多边形切削的数学原理，本质上就是应用曲线弧来代替直线段．恩格斯曾经指出："**高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾：在一定条件下直线和曲线应当是一回事。**"我国工人同志正是应用这个思想，以弯曲程度很小的曲线段来近似地代替直线段，从而在生产斗争中作出了新的贡献．

小　结

1．在平面内到两个定点的距离之和等于定长的点的轨迹叫做椭圆，两个定点叫做它的焦点．

2．设椭圆的中心在原点，两个焦点间的距离是 $2c$，椭圆上任一点到两个焦点的距离的和是 $2a$，那么

(1) 当焦点在 x 轴上时，椭圆的方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

(2) 当焦点在 y 轴上时，椭圆的方程是 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$．

这里，$b^2=a^2-c^2$．这两个方程都叫做椭圆的标准方程．

3．椭圆是一条封闭曲线，它有两条互相垂直的对称轴，两轴的交点叫做椭圆的中心；两个焦点在一条对称轴上，与中心等距离．

4．方程 $Ax^2+Cy^2=K$ 当 A，C 和 K 的符号相同时，表示一个椭圆．

5．半长轴为 a，半短轴为 b 的椭圆的方程，可表示成参数式

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi, \\ y=b\sin\varphi, \end{cases}$$

其中 $0\leqslant\varphi<2\pi$．

6. 转轴公式：

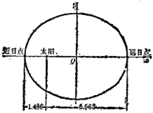
$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta; \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\ \begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

在这两组公式中，(x, y)是点在旧坐标系中的坐标，(x', y')是这一点在新坐标系中的坐标，θ是旧坐标系按逆时针方向旋转到新坐标系的角度.

习　题

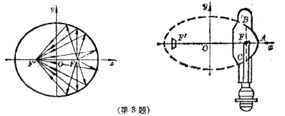
1. 求中心在原点，且适合于下列条件的椭圆的方程，并画出它们的图形：
   (1) 长轴和短轴分别等于 16 和 8，焦点在 x 轴上；
   (2) 焦点间的距离是 8，离心率是 0.8，焦点在 y 轴上；
   (3) 短轴的长是 4，一个焦点的坐标是 (5, 0)；
   (4) 长轴等于 20，离心率是 0.6，焦点在 x 轴上.
2. 彗星"紫金山一号"是我国紫金山天文台发现的，它的运行轨道是以太阳为一个焦点的椭圆，如图所示．测得轨道的近日点到太阳的距离是 1.486 天文单位；远日点到太阳的距离是 5.563 天文单位．求它的运行轨道方程(1 天文单位=1.5 亿公里).



(第 2 题)

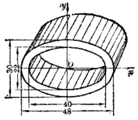
3. 椭圆绕着它的长轴旋转一周，形成椭球面．椭球面的反射镜面也有一个十分重要的光学性质，就是从它的一个焦点发射出去的光

线，经过椭球面的反射，必然会聚集到另一个焦点上(附图)．八点七五毫米电影放映机上的聚光灯泡，它的反射面 BAC(如图)是由椭圆绕它的长轴旋转而成的椭圆镜面，灯丝在它的一个焦点 F 上．已知灯丝到反射面顶点的距离 FA 是 1.5 厘米，过焦点 F 所作垂直于长轴的弦是 4.6 厘米．为了使电影机片门获得最强的光源，片门应放在另一焦点 F' 上．求这点与灯丝 F 间的距离．

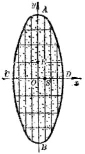


(第 3 题)

4．锅炉上人孔洞的截面是椭圆．它的长短轴的尺寸见附图(单位是厘米)，按图示的坐标系求截口曲线的方程，并画出图形．



(第 4 题)



(第 5 题)

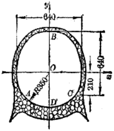
5．由射击学原理知道，当瞄准目标后不再调整就进行射击时，射弹散布区域是一个椭圆(见图)，叫做“散布椭圆”．长轴 AB 的 $\frac{1}{8}$ 如 OE 叫做高低公算偏差，短轴 CD 的 $\frac{1}{8}$ 如 OS 叫做方向公算偏差．已

知某个散布椭圆的方程是

$$2500x^2+400y^2=1000000,$$

求高低公算偏差和方向公算偏差.

6. 某隧道的断面如附图所示，拱形 ABC 是椭圆弧，ADC 是圆弧. 以椭圆弧和圆弧的公共中心 O 为原点，建立直角坐标系. 试按图上所标尺寸（单位是厘米），求圆拱 $\widehat{ADC}$ 的方程，椭圆拱 ABC 的方程和离心率.



（第 6 题）

7. (1) 地球的子午线为椭圆形，它的两半轴的比为 $\frac{299}{300}$，求地球子午线的离心率.

(2) 地球的运行轨道是一个椭圆，太阳在一个焦点上，从太阳到长轴的两个端点的距离分别约为 147.5 和 152.5 百万公里. 求这轨道的离心率.

第三节　双　曲　线

一、双　曲　线

远洋轮在海洋中航行时，可利用仪器接收专为导航而设置的无线电发射台发来的信号. 如图 8-51，设 F 和 F' 是两个发射台. 如果船 P 到两个发射台的距离不等，那么它们同时发出的信号到达船上的时刻就有先后. 船上所装的仪器，能够直接在读数栏里显示出同时从 F 和 F' 发来的信号到达船上的时间差. 由于无线电波的传播速度是确定的

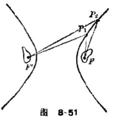


图 8-51

(3×10^5 公里/秒)，因此，知道了信号到达的时间差，也就能知道船舶离开两个发射台的距离差.

现在我们来看，当船 P 离开 F 和 F' 的距离之差为已知，例如 400 浬(1 浬 =1.852 公里)时，它可能在哪些位置上？当然，它的位置并不是唯一确定的. 因为它可以距 F 300 浬，距 F' 700 浬；也可以距 F 500 浬，距 F' 900 浬，等等. 我们把这些可能的位置 P_1, P_2, … 用平滑的曲线连接起来，就得到图 8-51 中右边的一条曲线.

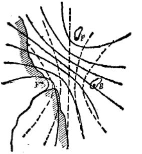


图 8-52

另一方面，船 P 也可能距发射台 F 比距发射台 F' 远 400 浬. 这样，船 P 的位置又可能在图 8-51 左边的一条曲线上.

这样的两条曲线总起来，就是本节所要讨论的双曲线.

利用双曲线的性质，可以精确地测定船舶航行中所在的位置. 这种方法叫做双曲线时差定位法.

在实用中，一般利用三个信号台所发出的信号，得到两两相交的两组双曲线，再采取一定的技术措施，即可定出船所在的位置(图 8-52).

1. 双曲线的标准方程　一般地说，在平面内到两个定点的距离之差等于定长的点的轨迹，叫做双曲线，两个定点叫做它的焦点.

下面我们来导出双曲线的方程.

取经过焦点 F 和 F' 的直线为 x 轴，线段 $F'F$ 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系(图 8-53).

设两个焦点间的距离是 $2c$ $(c>0)$，那么 F 和 F' 的坐标分别是 $(c,\ 0)$ 和 $(-c,\ 0)$.

又设 $P(x,\ y)$ 是双曲线上的任意一点，它到两个焦点 F 和 F' 的距离差的绝对值是定长 $2a\ (a>0)$，即

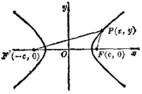


图 8-53

$$PF'-PF=\pm 2a.$$

根据两点间的距离公式，

$$PF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2};$$

同理，

$$PF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

所以

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

利用上节导出椭圆标准方程类似的方法：

移项，

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

两边平方，

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

就是

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

两边平方，

$$(cx-a^2)^2=a^2(x-c)^2+a^2y^2,$$

就是

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=(c^2-a^2)a^2,$$

即得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

因为 $2a<2c$, 即 $a<c$, 所以 c^2-a^2 是一个正数. 令 $c^2-a^2=b^2$ $(b>0)$, 代入上面的方程, 得

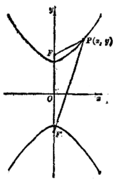


图 8-54

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).$$

这个方程叫做双曲线的标准方程.

假设焦点 $F(0, c)$ 和 $F'(0, -c)$ 在 y 轴上(图 8-54), 动点到两焦点的距离之差为 $2a$, 并且仍以 b^2 表示 c^2-a^2, 那么可求得焦点在 y 轴上的双曲线的方程:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

2. 双曲线的形状　下面根据双曲线标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

来讨论双曲线的形状.

(1) 在方程(1)中, 当 $y=0$ 时, $x=\pm a$. 所以这双曲线交 x 轴于点 $A(a, 0)$ 和 $A'(-a, 0)$. 当 $x=0$ 时, $-\frac{y^2}{b^2}=1$, 即 $y^2=-b^2$. y 为任何值时, y^2 都不可能等于负数, 所以适合于这个方程的 y 值不存在. 因此, 这双曲线与 y 轴不相交. 点 A 和 A' 叫做双曲线的顶点(图 8-55). 线段 $A'A$ 叫做双曲线的实轴, 它的长等于 $2a$. 在 y 轴上取两点 $B(0, b)$ 和 $B'(0, -b)$, 线段 BB' 叫做双曲线

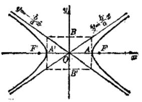


图 8-55

的虚轴，它的长等于$2b$．两轴的交点叫做双曲线的中心．

(2) 在方程(1)中，如果以$-x$代替x，或者以$-y$代替y，或者以$-x$，$-y$同时代替x，y，方程都不变．所以这双曲线关于实轴、虚轴和中心都是对称的．

(3) 由方程(1)，得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

从这个式子可以知道，只有当$|x|\geqslant a$时，y才有实数值．所以这双曲线完全处于两条直线$x=a$和$x=-a$的外侧．

(4) 又由方程(1)，得

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}.$$

从这个式子知道，y可取任何值，并且当y的绝对值增大时，x也取得越来越大的绝对值．所以这双曲线向左右两侧无限伸展．

(5) 为了进一步了解双曲线的伸展趋势，我们把

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

化成

$$y=\pm\frac{bx}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

从上式可知，当x的绝对值无限增大时，$\frac{a^2}{x^2}$就趋近于0．因此，$\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$就趋近于1，从而上式所表示的双曲线接近于直线

$$y=\pm\frac{b}{a}x,$$

但它们又不会相交．我们把这两条直线

$$y=\pm\frac{b}{a}x,$$

叫做双曲线的渐近线.

如果我们作出直线 $x=a$, $x=-a$, $y=b$ 和 $y=-b$ 所围成的长方形, 再作出它的两条对角线, 很明显, 这两条对角线的方程是 $y=\pm\frac{b}{a}x$. 把它们延长, 我们就得到双曲线的渐近线(图 8-55).

我们常利用双曲线的渐近线, 把双曲线的形状近似地画出来.

(6) 从图 8-55 中还可以看到, 双曲线的虚轴的一半 b 和实轴的一半 a 的比值 $\frac{b}{a}$ 愈小, 双曲线的张口愈小; 比值 $\frac{b}{a}$ 愈大, 双曲线的张口就愈大.

由 $b^2=c^2-a^2$ 可以得到

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1}.$$

和椭圆一样, 我们把 $e=\frac{c}{a}$ 叫做双曲线的离心率. 于是

$$\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}.$$

因为 $c>a$, 所以双曲线的离心率 $e>1$.

这样, 从 $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$ 可以看出, 当 e 的值愈大时, $\frac{b}{a}$ 的值也愈大, 双曲线张口愈大. 反过来, 当 e 的值愈小, 小到接近于 1 时, $\frac{b}{a}$ 的值就愈接近于 0, 双曲线的张口也就愈小.

如果 $a=b$, 那么这样的双曲线叫做等轴双曲线. 它的方程可以写做

$$x^2-y^2=a^2.$$

【例 1】 画出双曲线 $9x^2-4y^2=36$，并且求它的渐近线的方程和焦点的坐标.

解：把所给的方程化为标准方程. 各项都除以 36，得

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1. \tag{1}$$

所以 $a=2$, $b=3$.

画出以 $x=\pm2$, $y=\pm3$ 为边的长方形. 它的对角线所在的直线就是双曲线的渐近线，它们的方程是

$$y=\frac{3}{2}x \quad 和 \quad y=-\frac{3}{2}x.$$

因为

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13},$$

所以两个焦点的坐标是 $(\sqrt{13}, 0)$ 和 $(-\sqrt{13}, 0)$.

由方程(1)得

$$y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{x^2-4}.$$

根据这个关系式，在 $|x|\geqslant2$ 的范围内算出几组 x 和 y 的对应值，如下表:

x	2	3	4	5	…
y	0	±3.4	±5.2	±6.9	…

在直角坐标系内按上表定出各点，用平滑的曲线顺次连结各点，再利用双曲线的对称性和渐近线的性质，就可以画出如图 8-56 所示的双曲线的两支.

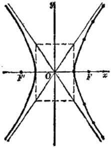


图 8-56

【例 2】 已知双曲线的中心是原点，焦点在 y 轴上，两焦点间的距离是 26，离心率是 $\frac{13}{5}$，求这双曲线的方程，并画出图形

解：设所求的双曲线的方程是

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{13}{5}$，而 $c=\frac{1}{2}\times 26=13$，所以

$$\frac{13}{a}=\frac{13}{5},$$

即 $$a=5.$$

又 $$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12.$$

因此，所求的双曲线的方程是

$$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{144}=1.$$

它的渐近线的方程是（注意，这里的焦点在 y 轴上）

$$y=\pm\frac{a}{b}x=\pm\frac{5}{12}x,$$

就是

$$y=\frac{5}{12}x \quad 和 \quad y=-\frac{5}{12}x.$$

根据求得的双曲线的方程，可画出如图 8-57 所示的图形.

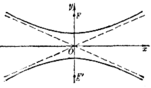


图 8-57

在熟悉了双曲线的标准方程后，如果遇到形如

$$Ax^2+Cy^2=K$$

的方程，其中 A 和 C 的符号相反，并且 $K\neq 0$，那么我们

可以肯定这方程表示双曲线，因为它显然可以化成双曲线的标准方程.

【例3】 双曲线型自然通风塔的通风筒，是双曲线绕它的虚轴旋转而成的壳体［图 8-58(1)］. 它具有接触面大，风的对流好，冷却快，又能节省建筑材料等优点. 某一通风筒的最小半径是 11.61 米，上口半径是 13 米，下底半径是 24.56 米，高 55 米. 求轴截面的双曲线的标准方程［图 8-58(2)］.

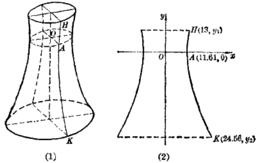


图 8-58

解：在图 8-58(2) 所示的坐标系中，风筒截面双曲线的方程应当是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

因为点 $A(11.61,\ 0)$ 是双曲线的一个顶点，所以 $a=11.61$. 又因为 $H(13,\ y_1)$ 和 $K(24.56,\ y_2)$ 都在双曲线上，所以有方程组

$$\begin{cases}\dfrac{13^2}{11.61^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\\[2mm] \dfrac{24.56^2}{11.61^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1.\end{cases}$$

就是

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{b}{11.61}\sqrt{13^2-11.61^2}=0.5036b, \\ y_2=-\dfrac{b}{11.61}\sqrt{24.56^2-11.61^2}=-1.864b. \end{cases}$$

由于风筒的高是 55 米，就是说，$y_1-y_2=55$，所以

$$0.5036b-(-1.864b)=55.$$

解这个方程，得

$$b=23.23.$$

所以风筒截面双曲线的方程是

$$\frac{x^2}{11.61^2}-\frac{y^2}{23.23^2}=1.$$

工人师傅根据这个方程，就可以画出截面双曲线的图形，随后再进行施工。

练习

1. 双曲线的中心在原点，焦点在 x 轴上，而且两焦点间的距离为 6 厘米，动点到两焦点的距离之差为 4 厘米，求这双曲线的方程。
2. 求下列各双曲线的实轴和虚轴的长、焦点的坐标、离心率和渐近线的方程，并画出它们的图形：

   (1) $4x^2-25y^2=100$;　　(2) $x^2-y^2=64$;

   (3) $8y^2-3x^2+48=0$;　　(4) $\frac{x^2}{4}-y^2=-1$.

[1. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. 2. (1) $2a=10, 2b=4$, $(\sqrt{29}, 0)$, $(-\sqrt{29}, 0)$, $e=\frac{\sqrt{29}}{5}$, $y=\pm\frac{2}{5}x$;　(2) $2a=16$, $2b=16$, $(8\sqrt{2}, 0)$, $(-8\sqrt{2}, 0)$, $e=\sqrt{2}$, $y=\pm x$;　(3) $2a=8$, $2b=2\sqrt{6}$, $(\sqrt{22}, 0)$, $(-\sqrt{22}, 0)$, $e=\frac{\sqrt{22}}{4}$, $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}x$;　(4) $2a=2$, $2b=4$, $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $e=\sqrt{5}$, $y=\pm\frac{1}{2}x$.]

二、圆锥曲线

在第七章和本章中，我们从点的不同运动形式出发，分别研究了抛物线、椭圆(圆作为椭圆的特例)和双曲线的特殊本质，但它们又是互相联系和互相统一的.

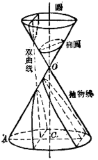


图 8-59

如图 8-59 的曲面是一个圆锥面(上下都可无限延伸)．它的每一腔，可以看成是一个直角三角形，如图中的 $\triangle OAC$，绕着它的一条直角边 OC 旋转一周而成．OC 所在的直线叫做圆锥的轴．直角三角形的斜边 OA 叫做圆锥的母线．用一个平面去截圆锥面，可以得到下面各种曲线：

(1) 当平面只和圆锥面的一腔相截，并且不和母线平行时，截得的曲线是椭圆(当平面与圆锥的轴垂直时，截得的曲线是圆)．

(2) 当平面和圆锥的某一条母线平行时，截得的曲线是抛物线．

(3) 当平面和圆锥面的两腔都相交时，截得的曲线是双曲线．

由此可知，抛物线、椭圆和双曲线都是圆锥面被不同位置的平面所截得的交线．因此它们统称为圆锥曲线．

由前面我们知道，圆锥曲线不论在直角坐标系中的位置怎样，它们的方程都是不同形式的二元二次方程．这是圆锥曲线的共性在方程中的反映．我们通常把圆锥曲线又叫做二次曲线．

天体和宇宙飞行器运动的轨迹都是圆锥曲线．太阳系的行星和人造地球卫星运转的轨道是椭圆，有些彗星的轨道是抛物线或双曲线的一部分．

在发射宇宙火箭时，如果火箭的飞行速度等于第一宇宙速度（7.9 公里/秒），那么它的轨道是绕地球的一个圆；大于第一宇宙速度而小于第二宇宙速度（11.2 公里/秒）时，轨道是椭圆；等于第二宇宙速度时，轨道是抛物线；大于第二宇宙速度时，轨道是双曲线的一支（如图 8-60）．

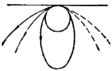


图 8-60

由于速度大小的变化引起轨道曲线形状的变化，从圆转化为椭圆、抛物线、双曲线，速度数量的变化引起了轨道曲线质的变化．

由上述可知：抛物线、椭圆、双曲线，它们既是互相对立，互相区别，各有其特殊的本质，但在一定条件下，它们又是互相联系，互相转化，互相统一的．

小　结

1．在平面内到两个定点的距离之差等于定长的点的轨迹叫做双曲线，两个定点叫做它的焦点．

2．设双曲线的中心在原点，两个焦点间的距离是 $2c$，双曲线上任一点到两个焦点的距离的差是 $2a$，那么

(1) 当焦点在 x 轴上时，双曲线的方程是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；

(2) 当焦点在 y 轴上时，双曲线的方程是 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$．

3．双曲线有两条互相垂直的对称轴，它与两个焦点所在的一条对称轴（称为实轴）相交，与另一条对称轴（称为虚轴）不相交；两轴的交点叫做双曲线的中心；过中心有两条相交直线构成双曲线的渐近线．

4．方程 $Ax^2+Cy^2=K$，当 A，C 的符号相反，并且 $K\neq0$ 时，表示双曲线．

习　题

1．求中心在原点，且适合于下列条件的双曲线的方程，并画出它们的图形．

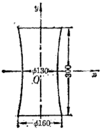
(1) 焦点间的距离等于 14，顶点间的距离等于 12，焦点在 x 轴上；

(2) 经过点(2，-5)，焦点在 y 轴上，实轴长的一半等于 $2\sqrt{5}$；

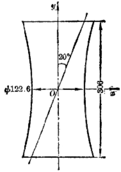
(3) 离心率等于 1.4，焦点在 x 轴上，实轴长的一半等于 5；

(4) 一条渐近线的方程是 $3x-2y=0$，一个焦点是 $(-\sqrt{13},0)$．

2．在加工校直机的双曲面滚轮时，随时要用样板去检验．做样板需根据图纸上的数据，先求出双曲线的方程，然后准确地画出双曲线．附图是校直机上某一型号的双曲面滚轮断面图样．试按图示尺寸求它的标准方程．



(第 2 题)

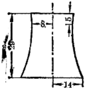


(第 3 题)

3．附图是另一型号的双曲面滚轮，它的主要数据如下：滚轮宽度是 $l=306$ 毫米；偏角（渐近线和虚轴的夹角）$\alpha=20°$；最小直径是 $d=122.6$ 毫米．求断面双曲线的方程．

4．某火力发电厂修建一座双曲线型钢筋混凝土冷却塔，塔高 29 米，

塔筒喉部到塔顶的距离是 5 米，塔筒喉部圆的半径是 8 米，塔底圆的半径是 14 米．求塔筒断面双曲线的方程。



(第 4 题)

5．试求与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 有共同的渐近线，并且通过点 $(-3, 2\sqrt{3})$ 的双曲线的方程。

第九章　其他几种常用曲线

第一节　等 速 螺 线

一、什么是等速螺线

“农业的根本出路在于机械化”．在毛主席的革命路线指引下，我国的农业机械化正在迅速发展．在农机厂里的车床上，可以看到如图 9-1(1) 所示的夹工件的夹具，叫做三爪卡盘．三爪卡盘上有三个卡爪，爪端与圆心等距离．当我们用扳手扳动小圆锥齿轮时，三个卡爪同时对卡盘中心作等距离的移动，从而能夹紧或松开工件，并保证圆形工件的轴线自动对准卡盘轴线，既迅速又平稳．

三爪卡盘的三个卡爪，为什么能对卡盘中心作等距离的移动呢？

打开三爪卡盘可以看到，原来里面有一个螺纹圆盘，它很象一盘蚊香固定在一块圆板上，三个卡爪分别由螺扣扣紧在螺纹圆盘上［图 9-1(2)］．圆盘的反面是圆锥齿轮［图 9-1(3)］，扳动小圆锥齿轮时，就能使圆盘转动．圆盘转动时，螺纹随圆盘而转动，扣在螺纹上的三个卡爪就在上面等距离地径向移动．可见，卡爪等距离地径向移动这一现象，完全与圆盘上的螺纹形状［图 9-1(4)］有关．

这种螺纹形状的曲线，我们平时也能看到，例如唱片上的

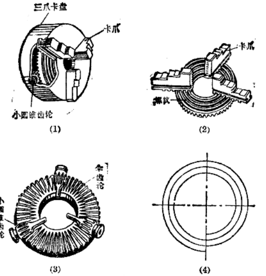


图 9-1

螺纹，钟表和仪表中的游丝（图 9-2），某些水泵的外壳曲线（图 9-3），机械上的某些凸轮曲线(图 9-4)等等，这种形状的曲线就是等速螺线．

下面我们从等速螺线的形成，来看三爪卡盘的三个卡爪作等距离移动的原理．

设射线 OM 上有一动点 P．当射线绕 O 作匀速旋转时，点 P 在 OM 上同时作匀速直线运动．这样，点 P 的运动轨迹就是等速螺线(图 9-5)．OM 每转过一周(即 2π 弧度)，OP 增加(或减少)的距离叫螺距，图 9-5 中，点 A 是点 P 的开始位置，点 B 是 OM 转过一周后点 P 的位置，AB 就是螺距．

图 9-2

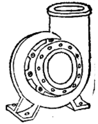


图 9-3

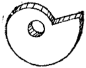


图 9-4

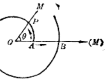


图 9-5

由等速螺线的形成可以看到它的一个重要特性，即 OM 绕 O 转动的角度均匀增加时，点 P 到 O 的距离也均匀增加（或减少）．因此，当三爪卡盘上的圆盘转过一定角度时，就相当于三个卡爪分别在等速螺线上转过了相同的角度，所以它们与中心增加（或缩短）了相同距离．

等速螺线的上述特性，常被用来设计机械中凸轮的工作面．凸轮是机械装置中的重要部件，它能使轴的旋转运动转化为从动杆的直线运动（图 9-6）．

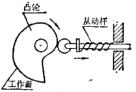


图 9-6

现在我们利用等速螺线的特性来画它的图形．

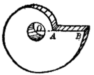


图 9-7

【例 1】 图 9-7 是一个凸轮，它的工作面曲线是等速螺线．轴心 O 到轮廓边缘的最短距离 $OA=30\,\text{mm}$，螺距 $AB=72\,\text{mm}$，试画出这个凸轮的工作面曲线．

解：螺距 72 毫米，就是图 9-5 中 OM 绕 O 旋转 2π 弧度后，OP 增长了 72 毫米．如果把 2π 弧度等分为若干份，例如 12 份，那么每等分为 $\frac{\pi}{6}$ 弧度．由等速螺线特性可知：OM 绕 O 每旋转 $\frac{\pi}{6}\left(\text{即 }\frac{2\pi}{12}\right)$弧度，$OP$ 相应地增加 $\frac{AB}{12}=\frac{72}{12}=6\,\text{mm}$．因此得到如下画法(图 9-8)：

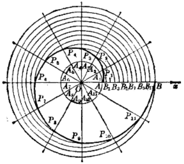


图 9-8

(1) 画射线 Ox，在 Ox 上依次截取 $OA=30\,\text{mm}$，$AB=72\,\text{mm}$；

(2) 以 O 为圆心，OA 为半径画圆，这个圆叫做基圆；

(3) 按相同份数，等分基圆的圆周和线段 AB(图中分为 12 等分)，分别得到分点 A_1，A_2，…，A_{11}；B_1，B_2，…，B_{11}；

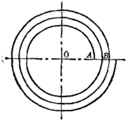
(4) 连接 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_{11}$, 并以 O 为圆心，分别以 $OB_1, OB_2, \cdots, OB_{11}$ 为半径画弧，依次分别交 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_{11}$ 的延长线于 $P_1, P_2, \cdots, P_{11}$;

(5) 用平滑的曲线依次连接 $A, P_1, P_2, \cdots, P_{11}, B$. 就画出了这个凸轮的工作面曲线，它是等速螺线在 $0\sim2\pi$ 弧度间的一段.

由此可知，这个凸轮在工作时，它每转过 $\frac{\pi}{6}$ 弧度，从动杆均匀地推出 6 毫米，也就是随着凸轮的匀速转动，从动杆就作匀速直线运动.

练习

附图是三爪卡盘圆盘上的等速螺线的螺纹. 已知等速螺线起点到圆盘的中心距离 OA 为 48 毫米，卡盘每转一周，螺纹推动卡爪径向移动(即螺距 AB) 12 毫米，试画出这条等速螺线(画二圈).



二、极坐标系

1. 极坐标系 在直角坐标系中象二次曲线那样建立等速螺线的方程是比较困难的. 为此，我们引进新的坐标系——极坐标系.

我们已经看到，等速螺线上点 P 的位置，是由 OM 绕 O

旋转的角度 θ 和点 P 到 O 的距离来确定的. 这就是说,用一个角度和一段距离也能够确定平面上一点的位置. 这种方法也广泛应用于生产实践中. 例如,在小平板仪测量中,常用的射线法,就是瞄一个方向画一条射线,再量出一段距离来定一点;在军事上,炮兵射击目标时,通常是瞄准目标的方向和定出离炮位的距离等.

这种用距离(长度)和方向(角度)来确定平面上点的位置的方法,叫做极坐标法.

在平面上取定一点 O,叫做极点(图 9-9),从 O 引一条射线 Ox,叫做极轴,再确定一个长度单位和计算角度的正方向(通常取逆时针方向为正),这样就建立了一个极坐标系.

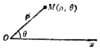


图 9-9

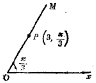


图 9-10

设 M 是平面上任意一点,它的位置可以由 OM 的长度 $\rho(\rho\geqslant 0)$ 和以极轴 Ox 为始边、射线 OM 为终边所成的角 θ 完全确定. (ρ, θ) 就是点 M 的极坐标,记作 $M(\rho, \theta)$. ρ 叫做点 M 的极径,θ 叫做点 M 的极角.

【例 2】 在极坐标系中,画出极坐标 $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ 所确定的点.

解:使极轴 Ox 绕 O 沿逆时针方向转 $\frac{\pi}{3}$,得到射线 OM(图 9-10). 在 OM 上取一点 P,使 $OP=3$(单位长度的三

倍)，这样所得的点 P，就是所求极坐标为$\left(3,\ \frac{\pi}{3}\right)$的点.

在图 9-11 中，A, B, C, D, E, F 各点的极坐标分别是 $A\left(5,\ \frac{4\pi}{3}\right)$, $B\left(3,\ -\frac{\pi}{4}\right)$, $C\left(5,\ \frac{3\pi}{4}\right)$, $D(5,\ \pi)$, $E\left(5,\ -\frac{\pi}{12}\right)$, $F\left(6,\ \frac{\pi}{3}\right)$.

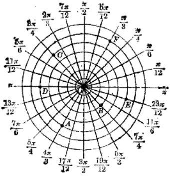


图 9-11

从图 9-11 可以看出，点 A 的极角 θ，既可以看作 $\frac{4\pi}{3}$，又可以看作 $-\frac{2\pi}{3}$，$\frac{10\pi}{3}$，…. 因此，点 A 的极坐标既可以表示为 $A\left(5,\ \frac{4\pi}{3}\right)$，也可以表示为 $\left(5,\ -\frac{2\pi}{3}\right)$，$\left(5,\ \frac{10\pi}{3}\right)$，…. 可见，在极坐标系内，对于每一对极坐标 $(\rho,\ \theta)$，都可以作出平面内唯一的一个点；反过来，平面内任意一点，都有它的极坐标 $(\rho,\ \theta)$，但不再是唯一的了，坐标 $(\rho,\ \theta\pm 2n\pi)$ (n 是整数) 都表示同一点.

特别，当 $\rho=0$ 时，不论 θ 取什么值，$(0,\ \theta)$ 都表示极点.

【例3】 根据图 9-12 的零件视图，写出 A, B, C, D, E 的极坐标.

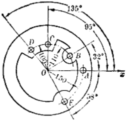


图 9-12

解：根据图示数据可知，A, B, C, D, E 的极坐标分别为 $A(150, 0°)$, $B(110, 32°)$, $C(100, 95°)$, $D(100, 135°)$, $E(150, -58°)$.

2. 极坐标方程 在极坐标系中，平面内一条曲线，可以用含有 ρ, θ 这两个变量的方程来表示. 这种方程叫做曲线的极坐标方程.

【例4】 设一圆通过极点，圆心在极轴上，半径为 $\frac{a}{2}$. 求这个圆的极坐标方程.

解：如图 9-13 所示，OB 是圆的直径，它的长等于 a. 设 $P(\rho, \theta)$ 是圆上任意一点. 在直角三角形 OPB 中，$OP=OB\cos\theta$，即

$$\rho=a\cos\theta.$$

这个圆上任意一点的极坐标 (ρ, θ) 都应满足这一关系式，因此，它就是所求圆的极坐标方程.

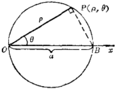


图 9-13

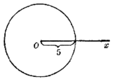


图 9-14

【例5】 试画出极坐标方程 (1) $\rho=5$; (2) $\rho=1+\cos\theta$ 所

表示的图形.

解: (1) $\rho=5$ 表示不论 θ 取什么值，它的图形上的点的极径都是5. 因此方程 $\rho=5$ 的图形，就是以极点 O 为圆心，5个单位长为半径的一个圆(图 9-14).

一般地，以极点 O 为圆心，以 a 为半径的圆的极坐标方程是

$$\rho=a.$$

(2) $\rho=1+\cos\theta$.

给 θ 以 O 到 2π 之间的一系列的值，求得 ρ 的对应值，列成下表:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	2	1.9	1.5	1	0.5	0.1	0	0.1	0.5	1	1.5	1.9	2

以表中每一对数为极坐标，在极坐标系中描出各点，然后用平滑的曲线依次连接各点，得到如图 9-15 所示的曲线.

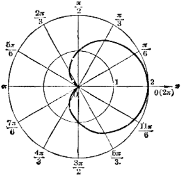


图 9-15

形如方程

$$\rho=a(1+\cos\theta)$$

所表示的曲线叫做心脏线．凸轮外壳有时也采用心脏线的一部分．

3．直角坐标与极坐标的互化　直角坐标系与极坐标系，它们都是用一对数来确定平面内一点的位置，因此同一点的直角坐标与极坐标之间必然存在着一定的联系，它们是可以转化的．

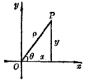


图 9-16

我们在同一平面内，使极坐标系的极点和直角坐标系的原点重合，极坐标系的极轴和直角坐标系的 x 轴的正半轴重合（图 9-16）．设平面内一点 P 的直角坐标是 (x, y)，它的极坐标是 (ρ, θ)，那么显然有

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta. \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x} \quad \text{（如果点 } P \text{ 不在 } y \text{ 轴上）}. \end{cases}$$

用公式 $\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$ 求极角 θ 时，需根据点 (x, y) 所在的象限来确定 θ 的值．

【例 6】 (1) 把点 M 的极坐标 $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ 化为直角坐标；

(2) 把点 N 的直角坐标 $(-3, 3)$ 化为极坐标．

解：(1) $x=4\cos\frac{\pi}{3}=2$；

$$y=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}.$$

即点 M 的直角坐标是 $M(2, 2\sqrt{3})$．

(2) $\rho=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$;

$\operatorname{tg}\theta=\frac{3}{-3}=-1$.

因为 $N(-3, 3)$ 在第 II 象限，所以

$$\theta=\frac{3\pi}{4}.$$

即点 N 的极坐标是 $N\left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

练习

1. 在极坐标系内，画出极坐标为 $\left(4, \frac{\pi}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{5}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ 的点.
2. 试画出 $\rho=2(1-\cos\theta)$ 的图形.
3. 将直角坐标 $(1, -\sqrt{3})$ 化为极坐标；将极坐标 $\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$ 化为直角坐标.

[3. $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$; $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$.]

三、等速螺线的极坐标方程

现在我们来建立例 1 中凸轮工作面曲线——等速螺线的极坐标方程.

在图 9-17 中，设 $P(\rho, \theta)$ 为等速螺线上的任一点，点 P 的开始位置为 $A(30, 0)$，螺距 $AB=72\text{ mm}$. 我们来找出 ρ 与 θ 的关系.

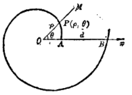


图 9-17

根据等速螺线的特性，点 P 的极径 ρ 是随着旋转角 θ 的增加而均匀增加的. 当射线 OM 转过 2π 弧度时，点 P 的极径从 30 毫米增加了螺距 d，即 72 毫米. 所以 OM 每转过 1 弧度时，点

P 的极径就增加

$$\frac{72}{2\pi}=\frac{36}{\pi}\quad\left(\text{即 }\frac{d}{2\pi}\right),$$

那么，射线 OM 旋转 θ 弧度时，点 P 的极径就增加 $\frac{36}{\pi}\theta$，因此

$$\rho=30+\frac{36}{\pi}\theta.$$

这就是例1中凸轮工作面曲线——等速螺线的极坐标方程。

一般地，等速螺线的极坐标方程是

$$\rho=\rho_0+\frac{d}{2\pi}\theta,$$

其中 ρ_0 是螺线起点（即 $\theta=0$ 时）到极点的距离（即基圆的半径），d 是螺距，它们都是已知数。我们如果用 a 来表示 $\frac{d}{2\pi}$，那么等速螺线方程是

$$\rho=\rho_0+a\theta.$$

$a>0$，表示 OM 每旋转1弧度点 P 的极径增加的距离；$a<0$，表示点 P 的极径减少的距离。

等速螺线上任意点的极坐标，都应满足这个关系式。利用这个关系式，对螺线上的任一点，可以由 ρ 与 θ 中的任意一个求出另一个来。

例如在等速螺线方程

$$\rho=30+\frac{36}{\pi}\theta$$

中，已知凸轮转过了60°，要求从动杆推进了多少毫米。我们将 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 代入方程，得

$$\rho=30+\frac{36}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3}=42,$$

即从动杆推进了 $42-30=12$ 毫米. 相反地,已知从动杆从原始位置推进了 18 毫米, 就是极径 $\rho=30+18=48$ 时, 要求凸轮转过了多少度,可将 $\rho=48$ 代入方程,得

$$\theta=\frac{48-30}{\frac{36}{\pi}}=18\times\frac{\pi}{36}=\frac{\pi}{2},$$

即凸轮转过了 90°.

【例 7】 在某种型号的缝纫机上,用桃形凸轮 (图 9-18) 控制机件上下运动. 这个凸轮一半推出,另一半缩回,且推出与缩回都是匀速的. 已知基圆半径是 16 毫米, 推程(最大推出距离) 是 30 毫米, 求桃形轮的方程,并画出它的图形.

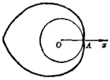


图 9-18

解: 建立极坐标系如图 9-18 所示,其中极点 O 就是基圆中心,极轴过起始点 A.

因凸轮一半推出, 一半缩回, 而且推出与缩回都是匀速的, 所以它们是两段等速螺线: $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 一段为推出, $\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 一段为缩回. 现在分别建立这两段等速螺线的极坐标方程.

设所求凸轮的等速螺线极坐标方程是

$$\rho=\rho_0+a\theta.$$

(1) 对于 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 一段,当 $\theta=0$ 时, $\rho=16$; 当 $\theta=\pi$ 时, $\rho=16+30=46$. 代入方程,得

$$\begin{cases}16=\rho_0+a\cdot0,\\46=\rho_0+a\cdot\pi.\end{cases}$$

解这个方程组, 得 $\rho_0=16$, $a=\frac{30}{\pi}$. 所以极坐标方程是

$$\rho=16+\frac{30}{\pi}\theta.$$

(2) 对于 $\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 一段. 当 $\theta=\pi$ 时, $\rho=46$; 当 $\theta=2\pi$ 时, $\rho=16$. 代入方程, 得

$$\begin{cases}46=\rho_0+a\pi,\\16=\rho_0+a\cdot2\pi.\end{cases}$$

解方程组, 得 $\rho_0=76$, $a=-\frac{30}{\pi}$. 所以极坐标方程是

$$\rho=76-\frac{30}{\pi}\theta.$$

根据所得方程列表:

方程	$\rho=16+\frac{30}{\pi}\theta$							$\rho=76-\frac{30}{\pi}\theta$						
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	16	21	26	31	36	41	46	46	41	36	31	26	21	16

描点画图, 即可得所求凸轮的轮廓曲线如图 9-19 所示.

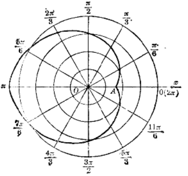


图 9-19

【例 8】 试设计一个基圆半径为 60 毫米的平面凸轮轮廓曲线，使其从动杆适合下面的运动规律：

(1) 当凸轮转角 θ 自 0 增加到 $\frac{5\pi}{6}$ 时，从动杆匀速地推出 60 毫米；

(2) 当凸轮转角 θ 自 $\frac{5\pi}{6}$ 增加到 $\frac{7\pi}{6}$ 时，从动杆匀速地缩回 60 毫米；

(3) 当凸轮转角 θ 自 $\frac{7\pi}{6}$ 增加到 2π 时，从动杆保持在原始位置．

解：我们先来建立方程．

(1) 凸轮在 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{6}$ 一段，从动杆匀速推出，所以是等速螺线．设它的方程是

$$\rho=\rho_0+a\theta.$$

当 $\theta=0$ 时，$\rho=60$；当 $\theta=\frac{5\pi}{6}$ 时，$\rho=60+60=120$．代入方程，得

$$\begin{cases} 60=\rho_0+a\cdot 0, \\ 120=\rho_0+\dfrac{5\pi}{6}a. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\rho_0=60, \quad a=\frac{72}{\pi}.$$

所以极坐标方程是

$$\rho=60+\frac{72}{\pi}\theta.$$

(2) 凸轮在 $\frac{5\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{7\pi}{6}$ 一段，从动杆匀速缩回，所以也

是等速螺线．设它的方程是

$$\rho=\rho_0+a\theta.$$

当 $\theta=\frac{5\pi}{6}$ 时，$\rho=120$；当 $\theta=\frac{7\pi}{6}$ 时，$\rho=60$．代入方程，得

$$\begin{cases}120=\rho_0+\frac{5\pi}{6}a,\\ 60=\rho_0+\frac{7\pi}{6}a.\end{cases}$$

解这个方程组，得 $\rho_0=270$，$a=-\frac{180}{\pi}$．所以极坐标方程是

$$\rho=270-\frac{180}{\pi}\theta.$$

(3) 凸轮在 $\frac{7\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 一段，从动杆保持不动，即凸轮极径不变，动点与极点等距离，所以是一段半径为 60 毫米的圆弧．它的极坐标方程是

$$\rho=60.$$

然后我们根据方程列表：

<table>
<tr><td>方　程</td><td colspan="6">$\rho=60+\frac{72}{\pi}\theta\ \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{6}\right)$</td></tr>
<tr><td>θ</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>$\frac{2\pi}{3}$</td><td>$\frac{5\pi}{6}$</td></tr>
<tr><td>ρ</td><td>60</td><td>72</td><td>84</td><td>96</td><td>108</td><td>120</td></tr>
<tr><td>方　程</td><td colspan="3">$\rho=270-\frac{180}{\pi}\theta\ \left(\frac{5\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{7\pi}{6}\right)$</td><td colspan="3">$\rho=60\ \left(\frac{7\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right)$</td></tr>
<tr><td>θ</td><td>$\frac{5\pi}{6}$</td><td>π</td><td>$\frac{7\pi}{6}$</td><td colspan="3">$\frac{7\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant 2\pi$</td></tr>
<tr><td>ρ</td><td>120</td><td>90</td><td>60</td><td colspan="3">60</td></tr>
</table>

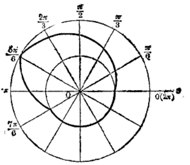


图 9-20

用描点法画出图形如图 9-20 所示.

有时为了直观地分析从动杆的运动情况，可以在直角坐标系内作出升程图. 如果把 ρ 与 θ 看成是直角坐标系里的两个变量，那么二元一次方程

$$\rho=\rho_0+a\theta$$

的图形是一条直线. 我们只要知道直线上的两点，就很容易作出它的图象.

由 $\rho=60+\frac{72}{\pi}\theta$, 可得直线上两点 $(0, 60)$ 与 $\left(\frac{5\pi}{6}, 120\right)$;

由 $\rho=270-\frac{180}{\pi}\theta$, 可得直线上两点 $\left(\frac{5\pi}{6}, 120\right)$ 与 $\left(\frac{7\pi}{6}, 60\right)$;

由 $\rho=60$ 可知是平行于 θ 轴的直线. 因此它们的图象如图 9-21 所示.

在这个图上，很直观地反映了从动杆在各个角度上的升程和运动规律. 同时，从升程图上可以得到一组组 θ 与 ρ 的对应值，从而可用描点法在极坐标系上画出凸轮曲线. 所以

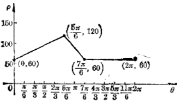


图 9-21

我们也可以根据曲线的方程先画出升程图，然后根据升程图，再画出凸轮曲线.

练习

1. 农村电力灌溉所用的某种型号的水泵，它的外壳曲线是等速螺线 $\rho=68-\frac{10}{\pi}\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{11\pi}{6}\right)$，画出它的图形.

2. 试设计一基圆半径 $r=25\text{mm}$ 的凸轮，使从动杆适合以下运动规律：

(1) 转角 θ 从 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时，从动杆匀速推出 10 毫米；

(2) 转角 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 $\frac{4\pi}{3}$ 时，从动杆保持不动；

(3) 转角 θ 从 $\frac{4\pi}{3}$ 增加到 2π 时，从动杆匀速缩回 10 毫米.

[2 (1) $\rho=25+\frac{20}{\pi}\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$； (2) $\rho=35\left(\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{4\pi}{3}\right)$；
(3) $\rho=55-\frac{15}{\pi}\theta\left(\frac{4\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right)$.]

小　结

1. 极坐标系：平面上点的位置，除了用直角坐标表示外，还可用极坐标表示.

(1) 平面上取定一点 O（极点），由 O 引一条射线 Ox（极轴），再确定一个单位长度和计算角度的方向，这样就建立了一个极坐标系.

用 ρ 表示平面上一点 M 到极点 O 的距离(极径)，θ 表示 OM 与 Ox 所成之角(极角)，(ρ, θ) 就表示点 M 的极坐标.

(2) 在极坐标系中，平面内的一条曲线可用含有 ρ, θ 这两个变量的方程来表示，这就是曲线的极坐标方程.

(3) 点的直角坐标与极坐标可以互化，公式如下：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

2. 等速螺线：

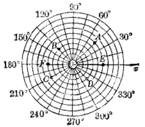
(1) 当射线 OM 绕 O 匀速旋转时，OM 上一点 P 同时在 OM 上作匀速直线运动，点 P 的运动轨迹就是等速螺线. 它的方程是

$$\rho=\rho_0+a\theta.$$

(2) 等速螺线具有这样的特性：OM 绕 O 转动的角度均匀增加时，点 P 到 O 的距离也均匀增加. 凸轮等机械零件就是利用它的这一特性，使轴的旋转运动转化为从动杆的直线运动.

习　题

1. 写出图中 A, B, C, D, E, F 各点的极坐标.



(第1题)

2. 画出由下列极坐标所表示的点：

$M_1\left(10, \frac{\pi}{6}\right)$; $M_2\left(10, -\frac{\pi}{6}\right)$; $M_3\left(10, 2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$; $M_4(7, -\pi)$; $M_5(6, 210°)$.

3. 将下列极坐标化为直角坐标:

$(3,\ 0)$; $\left(4,\ -\frac{\pi}{4}\right)$; $(12,\ -150^\circ)$.

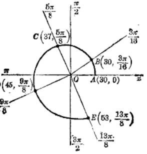
4. 将下列直角坐标化为极坐标:

$(-3,0)$; $(-1,\ -1)$; $(12,5)$.

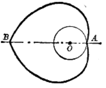
5. 画出等速螺线 $\rho=1+\theta$.

6. 三爪卡盘圆盘上有三圈螺纹, 螺纹上距中心最近的距离是 20 毫米, 最远距离是 35 毫米. 求此等速螺线的方程.

7. 已知某厂煤气站洗涤塔喷水咀外壳的平面截线上五个点的坐标是 $A(30,0)$, $B\left(30,\frac{3\pi}{16}\right)$, $C\left(37,\frac{5\pi}{8}\right)$, $D\left(45,\frac{9\pi}{8}\right)$, $E\left(53,\frac{13\pi}{8}\right)$, 并且 A 到 B 是圆弧, B 到 E 是等速螺线. 为了加工需要, 要求每隔 $\frac{\pi}{16}$ 画一个点. 试求出等速螺线的方程, 标出每隔 $\frac{\pi}{16}$ 的点的坐标, 并画出图形.



(第 7 题)



(第 8 题)

8. 如图所示, 某冲齿机凸轮工作面曲线是两条对称的等速螺线, 轴心到轮廓边缘的最短距离 $OA=20\,\text{mm}$, 最大距离 $OB=68\,\text{mm}$, 试画出这个凸轮的工作面曲线.

9. 某机床上的凸轮要使从动杆完成以下的运动:

(1) 转角 θ 自 0° 增加到 180° 时, 从动杆匀速推出 20 毫米;

(2) 转角 θ 自 $180°$ 增加到 $270°$ 时，从动杆保持不动;

(3) 转角 θ 自 $270°$ 增加到 $360°$ 时，从动杆匀速缩回到原始位置.

设基圆半径为 56 毫米，试画出凸轮的轮廓曲线.

第二节　渐开线和摆线

齿轮是机械传动中应用最广泛的传动机构之一. 在古代，我国劳动人民为了汲水浇地，很早就采用了带有齿轮传动装置的水车. 这是最简单的直线型齿轮. 在现代机械的齿轮传动中，一般采用齿廓曲线为渐开线的渐开线齿轮[图 9-22(1)]，在钟表、精密仪表中，往往采用齿廓曲线为摆线的摆线齿轮[图 9-22(2)].

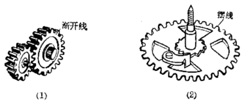


图 9-22

下面分别介绍渐开线和摆线.

一、渐　开　线

1. 渐开线及其作图　渐开线是怎样形成的呢?

在一个固定的圆盘上绕有一条细线，拉住线头，把线从圆盘上渐渐拉出来，并使拉出部分始终沿着与圆盘相切的方向绷紧，这样，线头的轨迹就叫做渐开线(图 9-23).

容易看出，渐开线也就是一条直线在一个圆上作无滑动

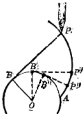


图 9-23

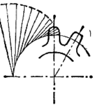


图 9-24

的滚动时，直线上一定点运动的轨迹，这圆叫做渐开线的基圆，这直线叫做渐开线的发生线．渐开线齿轮的齿廓曲线就是渐开线的一部分(图 9-24)．

从渐开线的形成可以知道(见图 9-23)，渐开线上任一点 P 到基圆的切线长 PB (即细线的拉出部分)，就是由相应的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$(A 是线头开始离开基圆的那点)拉直所得．所以

$$PB = \overset{\frown}{AB}.$$

同理 $\qquad B'P' = \overset{\frown}{B'A},\quad B''P'' = \overset{\frown}{B''A},\quad \cdots.$

我们可以根据这一特性来画渐开线．例如，画基圆直径 $D = 20\,\mathrm{mm}$ 的渐开线，画法如下：

(1) 先将基圆圆周分成若干等分，图 9-25 是将基圆 12 等分，分点分别用 A, A_1, A_2, $\cdots$, A_{11} 表示；

(2) 过各分点按同一方向作基圆的切线；

(3) 在过点 A 所作的切线上，从点 A 起截取长度等于基圆圆周长，即 $\pi D = 62.8\,\mathrm{mm}$ 的线段，得点 P．将线段 AP 也 12 等分，设这些分点顺次是 A_1', A_2', $\cdots$, A_{11}'；

(4) 分别在过点 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{11} 的切线上截取 $A_1P_1 = AA_1'$, $A_2P_2 = AA_2'$, $\cdots$, $A_{11}P_{11} = AA_{11}'$；

(5) 将点 A, P_1, P_2, …, P_{11}, P 连成平滑曲线，便得到基圆直径是 20 毫米的渐开线(图 9-25)。

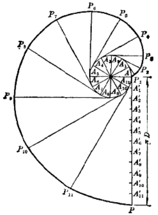


图 9-25

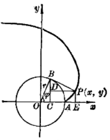


图 9-26

2. 渐开线的参数方程 我们先在直角坐标系内建立渐开线的参数方程.

设以渐开线基圆的圆心 O 为原点，O 与渐开线的起点 A 的连线 OA 所在的直线为 x 轴，建立直角坐标系 (图 9-26). 又基圆的半径是 r.

设 $P(x, y)$ 是渐开线上任意一点，过 P 画基圆的切线 PB. 由渐开线的形成知道:

$$PB = \overset{\frown}{AB}.$$

这就是说，点 P 的位置是和弧长 AB 密切相关的，而 $\overset{\frown}{AB}$ 的长仅取决于它所对的圆心角 φ, 所以点 P 的位置与 φ 有依赖关系，因此我们选用 φ 作参数.

现在，我们来找 x, y 与 φ 的关系式.

画 $PE\perp Ox$, $BC\perp Ox$, $PD\perp BC$. 因为在直角三角形 OCB 内 $\angle BOC=90^\circ-\angle OBC$, 又因为 $OB\perp BP$, $\angle PBD=90^\circ-\angle OBC$,

$$\therefore\quad \angle PBD=\angle BOC=\varphi.$$

如果 φ 的单位取弧度，那末

$$PB=\overset{\frown}{AB}=r\varphi,$$

$$\begin{aligned}x&=OE=OC+CE=OC+DP\\&=r\cos\varphi+PB\sin\varphi\\&=r\cos\varphi+r\varphi\sin\varphi\\&=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi);\\y&=EP=CD=CB-DB\\&=r\sin\varphi-PB\cos\varphi\\&=r\sin\varphi-r\varphi\cos\varphi\\&=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi).\end{aligned}$$

所以渐开线的参数方程是

$$\begin{cases}x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\\y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi).\end{cases}$$

【例 1】 某变压器厂制造的渐开线变压器，体积小，容量大．它的圆柱形铁芯是由渐开线形硅钢片嵌迭而成的（图 9-27）．为了推算这种硅钢片的落料长度公式，需要知道渐开线的参数方程．某型号渐开线变压器的硅钢片是基圆直径为 40 毫米的渐开线，写出这一渐开线的参数方程．

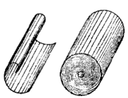


图 9-27

解：根据上面的推导，此渐开线的参数方程是

$$\begin{cases} x=20(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi), \\ y=20(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi). \end{cases}$$

在齿轮的设计和测量工作中，经常用的是渐开线的极坐标 ρ, θ 的参数方程.

我们取基圆的中心为极点，OA 方向的射线为极轴，建立极坐标系，如图 9-28 所示. 设 $P(\rho, \theta)$ 是渐开线上任意一点. 过点 P 作基圆的切线 PB，并设 $\angle POB=\alpha$，基圆半径是 r_0.

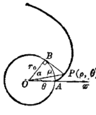


图 9-28

由图 9-28 可以看出，在直角三角形 OBP 中，$\cos\alpha=\dfrac{r_0}{\rho}$，所以有

$$\rho=\frac{r_0}{\cos\alpha}.$$

又根据渐开线的特性，有

$$r_0(\theta+\alpha)=\overset{\frown}{BA}=BP=r_0\operatorname{tg}\alpha.$$

所以有 $\theta+\alpha=\operatorname{tg}\alpha$，即

$$\theta=\operatorname{tg}\alpha-\alpha.$$

因此，所求渐开线的极坐标的参数方程是

$$\begin{cases} \rho=\dfrac{r_0}{\cos\alpha}, \\ \theta=\operatorname{tg}\alpha-\alpha. \end{cases}$$

这里 α 是参数，它表示 $\angle POB$，叫做压力角；θ 叫做渐开角.

【例 2】 已知渐开线的方程是

$$\begin{cases} \rho=\dfrac{10}{\cos\alpha}, \\ \theta=\operatorname{tg}\alpha-\alpha. \end{cases}$$

求曲线上对应 $\alpha=0°, 12°, 24°, 36°, 48°, 60°$ 的点的极坐标，利用这些点描出渐开线的部分图形.

解：将 α 的值代入渐开线的参数方程，得到一组组 ρ, θ 的值，列表如下：

α	0°	12°	24°	36°	48°	60°
ρ	10	10.2	10.9	12.4	14.9	20
θ	0	11′	1°36′	5°38′	15°38′	39°14′

将表中 ρ, θ 的每组数，在极坐标系上描点，并用平滑的曲线连接起来，得到如图 9-29 所示的图形，就是所求渐开线的一部分.

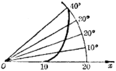


图 9-29

二、摆　　线

1 摆线的参数方程　设有一圆沿着一条定直线作无滑动的滚动，那么圆周上一个定点运动的轨迹，就叫做摆线或旋轮线(图 9-30)．这个圆叫做摆线的生成圆.

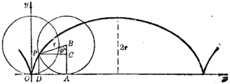


图 9-30

下面我们来建立摆线的参数方程．先建立直角坐标系．设动圆的半径是 r，在圆周上一定点 P 落在定直线上时的一个位置为原点 O，取定直线为 Ox 轴，以滚向为 Ox 轴的正向，Oy 轴则指向滚动着的圆的一侧，如图 9-30 所示．

当圆从点 O 开始，沿 Ox 轴的正向滚动时，假设滚过的角是 φ，这时圆心移到点 B，圆与 Ox 轴相切于 A，圆周上定点所在的位置是 $P(x, y)$．作 $PC \perp AB$，$PD \perp Ox$，那么 $\angle PBA$ 就是滚过的角，即 $\angle PBA = \varphi$（单位是弧度）．可以看出，x，y 与 φ 之间存在着下列关系：

$$
\begin{aligned}
x &= OD = OA - DA = \overset{\frown}{AP} - PC = r\varphi - r\sin\varphi \\
&= r(\varphi - \sin\varphi), \\
y &= DP = AC = AB - CB = r - r\cos\varphi \\
&= r(1 - \cos\varphi).
\end{aligned}
$$

因此，所求摆线的参数方程是

$$
\begin{cases} x = r(\varphi - \sin\varphi), \\ y = r(1 - \cos\varphi). \end{cases}
$$

这里 φ 是参数，它表示 $\angle PBA$，叫做滚动角．

φ 取不同的值，可求得一组组 x，y 的值，然后描点画出它的图象来（由读者自己完成）．

摆线由无数多支彼此一样的分支组成的，每一分支叫做摆线的一拱，每一拱的高是 $2r$，宽是 $2\pi r$，其中 r 是生成圆的半径．

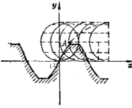


图 9-31

【例 3】 如图 9-31 所示的齿条的齿廓 OA 采用的是摆线的一段．已知滚动圆的半径是

12 毫米，求 OA 所在摆线的参数方程.

解：建立坐标系如图所示．OA 所在的摆线方程是

$$\begin{cases} x=12(\varphi-\sin\varphi), \\ y=12(1-\cos\varphi). \end{cases}$$

2．内(外)摆线的参数方程　一个动圆沿着一个定圆作无滑动的滚动，当动圆在定圆的里边(或外边)时，动圆圆周上一个定点运动的轨迹，叫做内摆线(或外摆线).

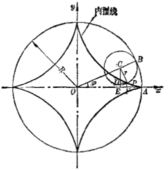


图　9-32

设定圆的半径是 R，动圆的半径是 r，取定圆的中心 O 为原点，并设 x 轴过两圆的一个切点 A. 当动圆滚到与定圆相切于点 B 时(图 9-32)，动圆圆心在点 C 处，圆周上定点所在位置是 $P(x, y)$．作 $PF\perp Ox$, $CE\perp Ox$, $PD\perp CE$, 并令 $\angle AOB=\varphi$.

因为 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{PB}$, 而 $\overset{\frown}{AB}=R\varphi$, $\overset{\frown}{PB}=r\angle PCB$, 所以 $r\angle PCB=R\varphi$, 即

$$\angle PCB=\frac{R}{r}\varphi.$$

又
$$\angle DCP+\angle PCB=\varphi+\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\angle DCP=\varphi+\frac{\pi}{2}-\angle PCB=\frac{\pi}{2}+\varphi-\frac{R}{r}\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{R-r}{r}\varphi.$$

$$\begin{aligned} x &= OF = OE + DP = OC\cos\varphi + CP\sin\angle DCP \\ &= (R-r)\cos\varphi + r\cos\frac{R-r}{r}\varphi, \\ y &= FP = EC - DC = OC\sin\varphi - CP\cos\angle DCP \\ &= (R-r)\sin\varphi - r\sin\frac{R-r}{r}\varphi. \end{aligned}$$

因此内摆线的参数方程是

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos\varphi + r\cos\dfrac{R-r}{r}\varphi, \\ y = (R-r)\sin\varphi - r\sin\dfrac{R-r}{r}\varphi. \end{cases}$$

图 9-32 所示是 $R=4r$ 时的内摆线.

当两圆外切，且动圆的半径是 r，定圆半径是 R 时，用与上面相仿的方法，可得外摆线的参数方程：

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\varphi - r\cos\dfrac{R+r}{r}\varphi, \\ y = (R+r)\sin\varphi - r\sin\dfrac{R+r}{r}\varphi. \end{cases}$$

图 9-33 所示是 $R=4r$ 时的外摆线.

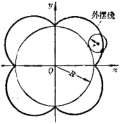


图 9-33

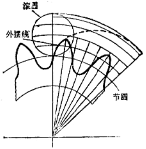


图 9-34

钟表齿轮齿形的理论轮廓线，它的齿顶部分是滚圆与节圆*外切，沿着节圆作无滑动滚动所得的外摆线，如图 9-34 所示．在实际生产中，钟表齿轮的齿形轮廓线是采用摆线的修正齿形，近似地用圆弧来代替．

【例 4】 插秧机分插轮(可参看第八章图 8-33)上秧爪排铰点 P（秧爪排和分插轮转臂的交点，见图 9-35）的运动轨迹，对插秧质量有一定影响．现以上海 I 型机动插秧机为例，对秧爪排铰点 P 的运动轨迹进行分析．

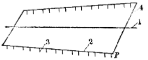


图 9-35

上海 I 型机动插秧机分插轮示意图

1—分插轮轴 2—秧爪排 3—秧爪 4—分插轮转臂

设插秧机前进速度为 v_0，分插轮转动角速度（每秒钟转过的弧度数）为 ω，它们之间有如下的关系：

$$v_0=\frac{\omega NS}{2\pi},$$

其中秧爪排数 $N=2$，S 为株距．

如果 $S=3$ 寸 $=100\,\mathrm{mm}$，那么

$$v_0=31.8\omega.$$

由上式可以看出，插秧机前进时，相当于分插轮以 31.8 毫米为半径的滚圆，沿一直线作无滑动的滚动(图 9-36)，因为它每秒钟滚过的弧长 31.8ω 就是插秧机的前进速度 v_0.

---

* 两个齿轮啮合传动，相当于两个摩擦轮作无滑动的滚动．这个假想的摩擦轮就叫做齿轮的节圆．

如果 $\omega=8.08/$秒，那么

$$v_0=31.8\times8.08=257(\text{毫米/秒})$$
$$=0.257(\text{米/秒}).$$

已知分插轮半径 $OP=160\,\text{mm}$，P 是滚圆半径延长线上一点，当滚圆沿直线滚动时，点 P 运动的轨迹叫做余摆线. 下面我们来建立点 P 的轨迹方程.

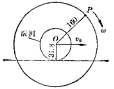


图 9-36

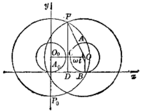


图 9-37

建立直角坐标系如图 9-37 所示.

设分插轮 O_0 以 $O_0A_0=31.8\,\text{mm}$ 为半径的滚圆沿 x 轴滚动，经 t 秒后从 O_0 滚到 O，那么滚过的角度 $\omega t=8.08t$，O_0，A_0，P_0(铰点原来的位置)转到了 O，A，P 的位置. 作 OB，PD 分别垂直 x 轴，连结 O_0O，那么 $O_0O\perp PD$，且交于点 C. 这时插秧机前进的距离

$$O_0O=A_0B=\overset{\frown}{AB}=8.08t\times31.8=257t,$$

$$DB=CO=OP\cos\left(8.08t-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=160\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-8.08t\right)\right]$$
$$=160\cos\left(\frac{\pi}{2}-8.08t\right)$$
$$=160\sin 8.08t;$$

$$CP = OP\sin\left(8.08t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 160\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - 8.08t\right)\right]$$
$$= -160\sin\left(\frac{\pi}{2} - 8.08t\right)$$
$$= -160\cos 8.08t.$$

所以点 P 的坐标是

$$x = A_0D = A_0B - DB = 257t - 160\sin 8.08t;$$
$$y = DC + CP = 31.8 - 160\cos 8.08t.$$

即点 P 的轨迹方程是

$$\begin{cases} x = 257t - 160\sin 8.08t; \\ y = 31.8 - 160\cos 8.08t. \end{cases}$$

根据上面的方程，可以画出点 P 运动轨迹的图象，如图 9-38 所示。

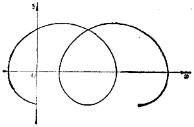


图 9-38

小 结

1．一条直线在一个圆上作无滑动的滚动，直线上一定点运动的轨迹，叫做渐开线．这圆叫做渐开线的基圆，这直线叫做渐开线的发生线．渐开线的直角坐标参数方程是

$$\begin{cases} x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi), \\ y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi). \end{cases}$$

它的极坐标参数方程是

$$\begin{cases} \rho=\dfrac{r}{\cos\alpha}, \\ \theta=\operatorname{tg}\alpha-\alpha. \end{cases}$$

渐开线在设计齿轮等实际问题中有重要应用.

2．一动圆沿着一条定直线作无滑动的滚动，圆上一定点运动的轨迹，叫做摆线或旋轮线，这个圆叫做摆线的生成圆．它的参数方程是

$$\begin{cases} x=r(\varphi-\sin\varphi), \\ y=r(1-\cos\varphi). \end{cases}$$

3．一动圆沿着一个定圆作无滑动的滚动，当动圆在定圆的里边(或外边)时，动圆圆周上一个定点运动的轨迹，叫做内摆线(或外摆线)．内摆线的参数方程是

$$\begin{cases} x=(R-r)\cos\varphi+r\cos\dfrac{R-r}{r}\varphi, \\ y=(R-r)\sin\varphi-r\sin\dfrac{R-r}{r}\varphi. \end{cases}$$

外摆线的参数方程是

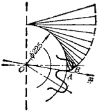
$$\begin{cases} x=(R+r)\cos\varphi-r\cos\dfrac{R+r}{r}\varphi, \\ y=(R+r)\sin\varphi-r\sin\dfrac{R+r}{r}\varphi. \end{cases}$$

摆线在齿轮中也有重要应用.

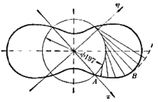
习　　题

1 试画出基圆直径是 24 毫米的渐开线.

2. 有一标准的渐开线齿轮，齿轮齿廓线的基圆直径是 225 毫米，求齿廓曲线 AB(附图)所在渐开线的极坐标的参数方程，并求曲线上对应于压力角 $\alpha=0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°$ 的点的极坐标，利用这些点描出渐开线的部分图形.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 小化肥厂里鼓风机的叶轮，它的轮廓曲线有一段是渐开线(附图)，它的基圆直径是 197 毫米，试求出渐开线的直角坐标的参数方程.

4. 试推导动圆半径为 r，定圆半径为 R 的外摆线的参数方程.

第十章　对数、计算尺和算图

第一节　对数的概念及运算法则

一、对数的意义

在工农业生产和科学实验中，人们经常会遇到下面这样一些计算问题.

(1) 某林场现有树木的材积(木材的体积)是 12560 立方米，如果每年的平均增值率是 11%. 问多少年后，该林场将有材积 36500 立方米？

设所求的年数是 x，那么

一年后的材积是

$$12560(1+11\%)=12560\times 1.11(\text{立方米});$$

二年后的材积是

$$12560\times 1.11\times(1+11\%)=12560\times 1.11^2(\text{立方米});$$

三年后的材积是

$$12560\times 1.11^3(\text{立方米});$$

…………………………

x 年后的材积是

$$12560\times 1.11^x(\text{立方米}).$$

根据题意，得

$$12560\times 1.11^x=36500,$$

$$1.11^x=\frac{36500}{12560},$$

即
$$1.11^x=2.9.$$

可见，这是一个已知底数和幂，求指数 x 的问题．这类问题，利用以前学过的知识，还不能解决．

(2) 我国第一颗人造地球卫星绕地球运转一周所需要的时间是

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{h_1+h_2}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}(\text{秒}).$$

其中地球半径 $R=6371$ 公里，重力加速度 $g=9.8$ 米/秒^2，人造卫星的近地点 $h_1=439$ 公里，远地点 $h_2=2384$ 公里．

象这种含有乘、除、乘方和开方运算的式子，如果直接进行计算是比较复杂的，有时甚至是困难的．

毛主席教导我们："**不同质的矛盾，只有用不同质的方法才能解决。**"为了解决上面这类计算问题，就要引入新的概念——对数．

象 $1.11^x=2.9$ 这种已知底数和幂，求指数的运算，叫做对数运算．指数 x 叫做以 1.11 为底 2.9 的对数，记作

$$x=\log_{1.11}2.9.$$

一般地说，如果 $a^x=N\ (a>0$ 且 $a\neq1)$*，我们把 x 叫做以 a 为底的 N 的对数，记作

$$\log_a N=x,$$

其中 a 叫做底数，N 叫做真数．

例如，因为 $2^3=8$、所以以 2 为底 8 的对数是 3，记作

* $a^x=N$ 中规定 $a>0$，$a\neq1$．这是因为：如果 $a<0$，那么当 x 为分数时，a^x 可能出现负数开偶次方，因此不作讨论；如果 $a=1$，那么 a^x 恒等于 1，没有讨论的必要．

$$\log_2 8=3,$$

读作以 2 为底 8 的对数等于 3；因为 $10^{-2}=0.01$，所以以 10 为底 0.01 的对数是 -2，记作

$$\log_{10} 0.01=-2.$$

因为 $a>0$，所以不论 x 取任何实数值，$N=a^x$ 恒为正数。

根据对数的意义可以知道，在底数 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时，

$$a^x=N \quad 和 \quad \log_a N=x$$

是 a，N 和 x 三个量之间同一关系的两种不同表现形式，它们是可以相互转化的．我们列表比较如下：

$a>0,\ a\neq1$	a	x	N	意　义
指数式 $a^x=N$	底数	指数	幂	a 的 x 次幂等于 N
对数式 $\log_a N=x$	底数	对数	真数	以 a 为底 N 的对数等于 x

把指数形式转化成对数形式，这是随着生产的发展，对数学计算提出的新的要求．恩格斯指出：**“任何一个数都可以理解为和表示为其他任何一个数的幂（对数，$y=a^x$）。而这种从一个形式到另一个相反的形式的转变，并不是一种无聊的游戏，它是数学科学的最有力的杠杆之一，如果没有它，今天就几乎无法去进行一个比较困难的计算。”**下面我们将看到，引进了对数，不仅可以把上述指数形式中的未知数 x 表达和计算出来，而且可以使困难的计算变得简单得多．

从对数形式和指数形式的相互转化中，可以推出对数的三个基本性质：

(1) 底的对数为 1

事实上，因为 $a^1=a$，所以

$$\log_a a=1.$$

(2) 1的对数为零.

事实上,因为 $a^0=1$, 所以

$$\log_a 1=0.$$

(3) 负数和零没有对数,即真数恒为正数. 且当底数大于1时,真数越大,对数也越大.

事实上,因为 $a>0$ 所以 $N=a^x>0$. 又因为当 $a>1$ 时,在 $N=a^x$ 中,N 越大,x 也越大.即 N 越大,$\log_a N$ 也越大.

练习

1. 把下列指数形式化成对数形式:

$2^4=16$; $3^{-3}=\frac{1}{27}$; $10^{-4}=0.0001$; $10^5=100000$;

$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$; $y=1.28^x$.

2. 把下列对数形式化为指数形式:

$\log_3 6561=8$; $\log_{1.5} 25=-2$; $\log_{100} 10=\frac{1}{2}$; $\log_a 1=0$;

$\log_{10} 0.0001=-4$; $\log_{1.1} x=y$.

二、积、商和幂的对数的运算法则

我们已经知道,同底数幂的运算规则是:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\quad (a>0),$$

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\quad (a>0),$$

$$(a^m)^n=a^{m\cdot n}\quad (a>0).$$

根据这些规则,可以导出计算积、商和幂的对数的运算法则.

(1) 两个正数的积的对数,等于这两个数的对数的和.

即 $$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N.$$

事实上,设 $\log_a M=x$, $\log_a N=y$, 那么

$$a^x=M,\ a^y=N.$$

所以，

$$M\cdot N=a^x\cdot a^y=a^{x+y}.$$

由对数的意义，得

$$\log_a(M\cdot N)=x+y=\log_a M+\log_a N.$$

这一法则可以推广到两个以上正数的积的情形：

$$\log_a(N_1\cdot N_2\cdot\cdots\cdot N_n)=\log_a N_1+\log_a N_2+\cdots+\log_a N_n.$$

(2) 两个正数的商的对数，等于被除数的对数减去除数的对数．即

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N.$$

利用 $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$ 这一规则，用推导法则 (1) 的类似方法，容易推得这个结论．

(3) 一个正数的幂的对数，等于这个正数的对数乘以指数．即

$$\log_a N^n=n\log_a N.$$

事实上，设 $\log_a N=x$，那么 $a^x=N$．所以，

$$N^n=(a^x)^n=a^{nx}.$$

由对数意义，得

$$\log_a N^n=nx=n\log_a N.$$

由此，我们还可以推得：

$$\log_a\sqrt[n]{N}=\frac{1}{n}\log_a N.$$

【例 1】 已知 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$．求 $\log_{10}12$，$\log_{10}\frac{8}{27}$，$\log_{10}\sqrt[3]{6}$．

解：$\log_{10}12=\log_{10}(3\times2^2)=\log_{10}3+\log_{10}2^2$

$$=\log_{10}3+2\log_{10}2=0.4771+2\times0.3010$$

$$=1.0791.$$

$$\log_{10}\frac{8}{27}=\log_{10}8-\log_{10}27=\log_{10}2^3-\log_{10}3^3$$

$$=3\log_{10}2-3\log_{10}3$$

$$=3\times0.3010-3\times0.4771=-0.5283.$$

$$\log_{10}\sqrt[3]{6}=\frac{1}{3}\log_{10}6=\frac{1}{3}\log_{10}(2\times3)$$

$$=\frac{1}{3}(\log_{10}2+\log_{10}3)$$

$$=\frac{1}{3}(0.3010+0.4771)=0.2594.$$

【例 2】 求 $\log_2\left(\frac{\sqrt{32}\times0.25}{\sqrt[3]{16}}\right)$.

解：

$$\log_2\left(\frac{\sqrt{32}\times0.25}{\sqrt[3]{16}}\right)=\log_2\sqrt{32}+\log_2 0.25-\log_2\sqrt[3]{16}$$

$$=\frac{1}{2}\log_2 32+\log_2\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\log_2 16$$

$$=\frac{1}{2}\log_2 2^5+\log_2 2^{-2}-\frac{1}{3}\log_2 2^4$$

$$=\frac{1}{2}\times5\times1-2\times1-\frac{1}{3}\times4\times1$$

（为什么？）

$$=-\frac{5}{6}.$$

从上面的例题可以看出，利用对数运算法则，可以把乘、除运算转化为加、减运算；乘方、开方运算转化为乘、除运算，从而简化了计算。

练习

求下列各对数的值：$\log_{10} 3000$；$\log_{10} 1.8$；$\log_{10}(1.2)^2$。

[3.4771；0.2552；0.1582.]

小　结

1．如果 $a^x=N(a>0, a\neq1)$，那么，x 叫做以 a 为底的 N 的对数，记作 $\log_a N=x$ $(a>0, a\neq1)$．其中 a 叫做底数，N 叫做真数．

$a^x=N$ 和 $\log_a N=x$ 是 a，N 和 x 之间同一关系的两种不同的表现形式，它们是可以相互转化的．

2．对数运算法则：

(1) $\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a N^n=n\log_a N$，

$\log_a \sqrt[n]{N}=\dfrac{1}{n}\log_a N$．

习　题

1．求下列各对数：

(1) $\log_{10} 1000$；$\log_5 625$；$\log_{10} 100^{2.5}$．

(2) $\log_{10} 0.00001$；$\log_{10}\dfrac{1}{1000^{2.5}}$；$\log_4\dfrac{1}{64}$．

(3) $\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{1000}}$．

2．求下列各式中的 x：

(1) $\log_{1/2} x=-3$；　　(2) $\log_2 x=0.125$；

(3) $\log_{10} x=-1$；　　(4) $\log_{100} x=\dfrac{1}{2}$．

3．已知 $\log_{10} 2=0.3010$，$\log_{10} 3=0.4771$，$\log_{10} 7=0.8451$．求下列各对数的值：

(1) $\log_{10} 0.0021$；　　(2) $\log_{10} 4200$；

(3) $\log_{10}\dfrac{63}{8}$;　　　　(4) $\log_{10}\sqrt[3]{23}$.

4. 计算下列各式的值:

(1) $\log_{36}6-\log_6 36+\log_6\dfrac{1}{36}-\log_{36}\dfrac{1}{6}$;

(2) $\log_a\sqrt[n]{a}+\log_a\dfrac{1}{a^n}+\log_a\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

第二节　常 用 对 数

上面介绍了对数的概念和运算法则. 因为我们常用的计数制是十进位制, 所以在对数计算中, 常常用 10 做对数的底数. 以 10 为底的对数叫做常用对数. 为了简便, 常用对数通常把底数 10 省略不写, 并把"log"记成"lg". 例如, $\log_{10}N$ 记成 $\lg N$. 以下我们讲的对数, 就是指常用对数.

一、求常用对数的方法

对于常用对数, 除了上节所讲的一般性质和运算规则都成立外, 还有它的特殊性质. 下面我们先介绍常用对数的一些特殊性质, 然后说明求常用对数的方法.

1. 10 的整数次幂的对数　我们知道,

$\lg 1=\lg 10^0=0$;　　　　$\lg 0.1=\lg 10^{-1}=-1$;

$\lg 10=\lg 10^1=1$;　　　　$\lg 0.01=\lg 10^{-2}=-2$;

$\lg 100=\lg 10^2=2$;　　　　$\lg 0.001=\lg 10^{-3}=-3$;

$\lg 1000=\lg 10^3=3$;　　　　……

……

一般地,

$$\lg 1\underbrace{00\cdots0}_{n\text{个零}}=\lg 10^n=n;$$

$$\lg \underbrace{0.00\cdots0}_{n\text{个零}}1=\lg 10^{-n}=-n.$$

由此得出：10的整数次幂的常用对数是一个整数，它等于这个幂的指数。

【例 1】 求下列各对数：

(1) $\lg 1000000$;

(2) $\lg 0.00001$.

解：(1) $\lg 1000000=\lg 10^6=6$.

(2) $\lg 0.00001=\lg 10^{-5}=-5$.

【例 2】 求下列各真数 x:

(1) $\lg x=5$;

(2) $\lg x=-3$.

解：(1) $\because \quad \lg x=5, \qquad \therefore \quad x=10^5=100000$.

(2) $\because \quad \lg x=-3, \qquad \therefore \quad x=10^{-3}=0.001$.

2. 1～10之间的数 A 的对数 当 $1<A<10$ 时，根据上一节对数性质(3)，就有

$$\lg 1<\lg A<\lg 10,$$

即
$$0<\lg A<1.$$

于是得：1～10之间的数的对数是一个正的纯小数(0～1之间的小数叫做正的纯小数).

1～10各数的对数，可以从本书附录中的"常用对数表"查得．具体查法详见表后所附的说明．

【例 3】 查"常用对数表"，求下列对数：

(1) $\lg 1.04$; (2) $\lg 6.877$; (3) $\lg 8.563$.

解：(1) $\lg 1.04=0.017$.

(2) $\lg 6.877=0.8374$.

(3) $\lg 8.563=0.9327$.

3 小于 1 或大于 10 的正数的对数 从"常用对数表"只能查得 1～10 之间各数的对数，那么小于 1 或大于 10 的正数的对数怎么求？我们知道任意一个正数 N 都可以写成

$$N = A\times 10^n \quad (1\leqslant A<10,\ n \text{ 为整数})$$

的形式. 根据积的对数的运算法则，有

$$\lg N = \lg 10^n + \lg A = n + \lg A.$$

例如 $\because\ 8563 = 8.563\times 10^3,$

$\therefore\ \lg 8563 = \lg 10^3 + \lg 8.563 = 3 + 0.9327;$

$\because\ 856.3 = 8.563\times 10^2,$

$\therefore\ \lg 856.3 = \lg 10^2 + \lg 8.563 = 2 + 0.9327;$

$\because\ 0.8563 = 8.563\times 10^{-1},$

$\therefore\ \lg 0.8563 = \lg 10^{-1} + \lg 8.563 = -1 + 0.9327;$

$\because\ 0.08563 = 8.563\times 10^{-2},$

$\therefore\ \lg 0.08563 = \lg 10^{-2} + \lg 8.563$
$= -2 + 0.9327.$

由此得：任何正数的常用对数，是一个整数与一个正的纯小数(或者零)的和，整数部分叫做这个对数的首数，正的纯小数部分叫做这个对数的尾数.

那么怎样求任何正数的常用对数的首数和尾数呢？

(1) 查尾数：从上面可以看出，8563, 856.3, 0.8563, 0.08563, … 这些只是小数点位置不同的数，它们的对数的尾数是相同的，就是 8.563 的对数. 因此，任何一个正数的对数的尾数，就是把这个正数化成 $A\times 10^n (1\leqslant A<10)$ 后，数 A 的对数. 由于 A 是 1～10 之间的数，所以它的尾数总可以在"常用对数表"中查得.

(2) 定首数：上面的例子表明，$\lg 8563$ 的首数是 3，$\lg 856.3$ 的首数是 2，$\lg 0.8563$ 的首数是 -1，$\lg 0.08563$ 的

首数是 -2. 对照着真数和它的对数的首数,我们可以看出:

当真数大于1时,它的对数的首数等于真数的整数部分的位数减1. 例如856.3,它有三位整数,所以它的对数的首数是 $3-1=2$;

当真数小于1时,它的对数的首数是一个负整数,它的绝对值等于这个真数左边第一个非零数字前面零的个数(包括小数点前面的一个零). 例如0.08563,在第一个不为零的数8之前,有两个"0",所以它的首数是 -2.

【例4】 求 (1) $\lg 204.8$;

(2) $\lg 0.008261$.

解:(1) 先查尾数. 移动204.8的小数点位置,使成2.048(实际上化成 $204.8=2.048\times10^2$). 查"常用对数表",得0.3113.

再定首数. 因为204.8的整数部分是三位数,所以它的对数的首数是 $3-1=2$. 把它们加在一起,即得

$$\lg 204.8=2.3113.$$

(2) 查尾数. 移动0.008261小数点的位置,使成8.261 ($0.008261=8.261\times10^{-3}$). 查表得0.9171.

定首数. 这里真数小于1,在第一个不为零的数8之前,有三个"0",所以它的首数是 -3.

$$\therefore\quad \lg 0.008261=-3+0.9171.$$

对数的首数是负整数时,为了运算方便,通常不把负整数和正尾数相加,而把"$-$"号写在整数上面,把"$+$"号省略不写. 例如 $-3+0.9171$ 写成 $\bar{3}.9171$. 所以

$$\lg 0.008261=\bar{3}.9171.$$

这里要注意,$\bar{3}.9171\neq-3.9171$. (为什么?)

练习

1. 求下列各对数：

(1) $\lg 10000$; (2) $\lg 0.0001$;

(3) $\lg 1.56$; (4) $\lg 7.37$;

(5) $\lg 4.156$; (6) $\lg 9.134$.

2. 求下列各数的常用对数：

3452; 900; 32.74; 0.135; 0.076; 0.00042; 51300; 0.0513; 5.13; 0.513.

【例5】 求 $\lg 0.03264+\lg 0.8128$.

解：$\lg 0.03264+\lg 0.8128=\bar{2}.5137+\bar{1}.9100$

$$=(-2-1)+(0.5137+0.9100)=-3+1.4237$$

$$=(-3+1)+0.4237=\bar{2}.4237.$$

注意：首数和尾数可以分别相加后再合并.

【例6】 求 $3\lg 0.7001$.

解：$3\lg 0.7001=3\times\bar{1}.8452=3\times(-1+0.8452)$

$$=-3+2.5356=(-3+2)+0.5356$$

$$=\bar{1}.5356.$$

注意：首数和尾数可以分别先乘以某数后再合并.

【例7】 求 $\frac{1}{2}\lg 0.007845$.

解：$\frac{1}{2}\lg 0.007845=\frac{1}{2}\times\bar{3}.8946=\frac{1}{2}(-3+0.8946)$

$$=\frac{1}{2}(-4+1.8946)=-2+0.9473$$

$$=\bar{2}.9473.$$

注意：对于首数为负的对数，在首数与尾数分开写时，如果要除以某数，而这个首数不能被某数整除，那么就要把这个首数化成一个能被某数整除的负数与一个正数的和的形式，把添加的正数并到尾数中去（如上例的首数 -3 不能被 2 整

除，那么将 -3 化成 $-4+1$，而将 $+1$ 并到尾数中去)，然后再分别除以某数.

二、已知对数求真数

已知一个正数，可以从"常用对数表"中查出它的对数来；反过来，已知一个数的对数，也可以从这个表中查到这个数. 但为了方便，专门编有"反对数表"，可根据已知的对数查出对应的真数来. 从已知一个正数求对数的步骤，可以相应地得到已知对数求真数的方法.

(1) 根据已知对数的尾数，查"反对数表"，得到所求真数的四位数字；

(2) 根据对数的首数来确定所求真数的小数点位置.

【例 8】 已知 $\lg x=2.2863$，求 x.

解：根据对数的尾数 0.2863 查"反对数表"，得 1933；因为已知对数的首数是 2，而真数的整数部分的位数应当是首数加 1，所以所求真数有 $2+1=3$ 位整数，即

$$x=193.3.$$

【例 9】 已知 $\lg x=\bar{4}.5745$，求 x.

解：由尾数 0.5745 查"反对数表"，得 3754；因为首数 -4 是负数，所以真数第一个非零数左边有四个零，即

$$x=0.0003754.$$

【例 10】 已知 $\lg N=-2.1461$，求 N.

解：由于对数的尾数 -0.1461 是负数，不能直接查表，因此要先把 $\lg N$ 化成负首数与正尾数和的形式：

$$\begin{aligned}\lg N&=-2.1461=-2-0.1461\\&=(-2-1)+(1-0.1461)\\&=-3+0.8539=\bar{3}.8539.\end{aligned}$$

由尾数 0.8539 查表得 7144, 因为首数是 -3, 所以

$$N=0.007144.$$

练习

求下列各式中的真数 x:

(1) $\lg x=4$; (2) $\lg x=-3$; (3) $\lg x=1.741$;

(4) $\lg x=0.852$; (5) $\lg x=5.641$; (6) $\lg x=\bar{2}.0032$;

(7) $\lg x=\bar{4}.134$; (8) $\lg x=-1.4183$; (9) $\lg x=-0.415$.

[(1) $x=10000$; (2) $x=0.001$; (3) $x=55.08$; (4) $x=7.112$;

(5) $x=437500$; (6) 0.01007; (7) 0.0001361; (8) $x=0.03817$;

(9) $x=0.3846$.]

三、常用对数的应用

毛主席教导我们:"理论的基础是实践, 又转过来为实践服务。"学习了对数,我们来看它的一些应用.

【例 11】 解第一节中的问题(1): 已知 $1.11^x=2.9$, 求 x.

解: 两边取常用对数,

$$\lg 1.11^x=\lg 2.9,$$

即

$$x\lg 1.11=\lg 2.9,$$

$$x=\frac{\lg 2.9}{\lg 1.11}=\frac{0.4624}{0.0453}\approx 10.$$

即大约 10 年后,该林场将有材积 36500 立方米.

【例 12】 解第一节中的问题 (2): 计算我国第一颗人造地球卫星绕地球一周所需的时间:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{h_1+h_2}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}\ (\text{秒}).$$

解: 将各项数据代入上式, 两边取对数, 得

$$\lg T=\lg\left[2\times3.14\times\sqrt{\frac{6371}{9.8\times10^{-3}}}\left(1+\frac{439+2384}{12742}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\lg\left[6.28\times\sqrt{\frac{6371}{0.0098}}\left(\frac{15565}{12742}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\lg 6.28+\frac{1}{2}(\lg 6371-\lg 0.0098)$$

$$+\frac{3}{2}(\lg 15565-\lg 12742)$$

$$=0.7980+\frac{1}{2}\times5.8130+\frac{3}{2}\times0.0871=3.8352.$$

查"反对数表",得

$$T=6842\text{秒}=114\text{分}2\text{秒}.$$

【例 13】 某生产队对水稻试验田估产，测得平均株距 4.8 寸，平均行距 4.6 寸，每穴平均 12.9 穗，每穗平均 89.1 粒，千粒重 27.7 克，问亩产是多少斤?

解：根据第一章中已学过的预测亩产的计算，知道

$$\text{亩产量 } x=\text{每亩种植穴数}\times\text{每穴平均穗数}$$

$$\times\text{每穗平均粒数}\times\text{千粒重}\times\frac{1}{1000\times500}$$

$$=\frac{600000}{4.8\times4.6}\times12.9\times89.1\times27.7\times\frac{1}{1000\times500}$$

$$=\frac{12.9\times89.1\times27.7\times1.2}{4.8\times4.6}.$$

两边取对数，得

$$\lg x=\lg 12.9+\lg 89.1+\lg 27.7+\lg 1.2$$

$$-(\lg 4.8+\lg 4.6)$$

$$=1.1106+1.9499+1.4425+0.0792$$

$$-(0.6812+0.6628)$$

$$=4.5822-1.3440=3.2382.$$

查"反对数表"，得

$$x=1731.$$

即水稻试验田亩产量约为 1731 斤.

【例 14】 计算 $N=2.75\times\sqrt[3]{-0.3684}$.

解：因为 $N=2.75\times\sqrt[3]{-0.3684}=-(2.75\times\sqrt[3]{0.3684})$ 是一个负数，而负数是没有对数的，所以设

$$M=2.75\times\sqrt[3]{0.3684},$$

于是

$$\begin{aligned}\lg M&=\lg 2.75+\frac{1}{3}\lg 0.3684\\&=0.4393+\frac{1}{3}(\bar{1}.5663)\\&=0.4393+\frac{1}{3}(-3+2.5663)\\&=0.4393-1+0.8554=0.2947.\end{aligned}$$

查"反对数表"，得 $M=1.971$，所以

$$N=-1.971.$$

练习

1. 计算下列各式：
   (1) $\lg 0.054+\lg 0.083$;　　(2) $\lg 2.187-\lg 0.534$;
   (3) $\lg(0.145)^2-2\lg 0.0728+\lg 345.6$.
2. 计算下列各式：
   (1) $x=144.6\times 0.0256\times 0.75^2$;
   (2) $x=\dfrac{17.95\times 0.08304}{0.1764}$;
   (3) $x=(-73.58)^3\times\sqrt[5]{0.00463}$.

[1. (1) $\bar{3}.6515$; (2) 0.6124; (3) 3.1372. 2. (1) 1.563; (2) 8.450; (3) -136000.]

四、对数的换底

在高等数学和工程技术中，还广泛使用一种以 e ($e=2.71828\cdots$，是无理数)为底的对数．这种对数叫做自然对数．通常把"$\log_e N$"记为"$\ln N$"．

一个正数 N 的常用对数 $\lg N$ 和自然对数 $\ln N$ 之间的关系怎样？为了解决这个问题，我们先研究对数的换底公式．

设某一正数 N 的以 a ($a>0$, $a\neq 1$) 为底的对数为 x，即

$$\log_a N = x.$$

化为指数式，得

$$a^x = N.$$

两边各取以 b ($b>0$, $b\neq 1$)为底的对数，得

$$x\log_b a = \log_b N.$$

因此，

$$x = \frac{\log_b N}{\log_b a},$$

即

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}. \qquad (1)$$

这就是把真数 N 以 a 为底的对数，化为以 b 为底的对数的换底公式．应用这个公式，就可以利用"常用对数表"求得以任意数 a ($a>0$, $a\neq 1$)为底的正数 N 的对数．

【例 15】 求 $\log_2 5$．

解：对照公式(1)，这里 $a=2$，$b=10$，$N=5$，

$$\therefore \quad \log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2} = \frac{0.6990}{0.3010} = 2.322.$$

在公式(1)中，如果 $a=e$，$b=10$，那么

$$\ln N=\frac{\lg N}{\lg e}.$$

因为

$$\frac{1}{\lg e}=\frac{1}{\lg 2.718}=\frac{1}{0.4343}=2.303,$$

所以

$$\ln N=2.303\lg N.$$

这就是由常用对数求自然对数的换算公式.

【例 16】 利用常用对数求 $\ln 10$, $\ln 100$.

解：根据上面公式,

$$\ln 10=2.303\lg 10=2.303;$$

$$\ln 100=2.303\lg 100=2.303\times 2=4.606.$$

小　　结

1. 以 10 为底的对数叫做常用对数. $\log_{10} N$ 简写为 $\lg N$.
2. 已知真数 N 求对数 $\lg N$ 的步骤:
   (1) 查尾数. 把N化成 $A\times 10^n$ $(1\leqslant A<10)$的形式, 查"常用对数表", 得到正的纯小数或零.
   (2) 定首数. 当 $N>1$ 时, 首数等于 N 的整数部分位数减 1; 当 $N<1$ 时, 首数为负整数, 它的绝对值等于 N 的第一个非零数字前零的个数.
   (3) 写出对数: $\lg N=$首数+尾数.
3. 已知对数 $\lg N$ 求真数 N 的步骤:
   (1) 由尾数查"反对数表"得真数 N 的四位数字.
   (2) 根据首数确定真数的小数点位置.
4. 对数的换底公式:
$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}.$$
5. 以 e 为底的对数叫做自然对数. 自然对数可用常用对数表示为
$$\ln N=\frac{\lg N}{\lg e}=2.303\lg N.$$

习　题

1. 计算下列各式:

(1) $5\lg 2.15+3\lg 14.3$;　　(2) $\lg 0.873-\lg 0.543$;

(3) $\lg(2.17)^3+\lg\sqrt[3]{0.0253}-\lg\sqrt{0.0025}$.

2. 计算下列各式:

(1) $x=\sqrt[3]{\dfrac{738\times\sqrt{41.3}}{0.815^2\times 52.6}}$;　　(2) $x=0.0485^{0.012}$.

3. 单缸四冲程柴油机的有效功率

$$N_e=\frac{P_e\cdot V_h\cdot n}{12\times 75}\ (\text{马力}),$$

其中 P_e 是平均有效压力(公斤/厘米^2), V_h 是气缸容积(升), n 是飞轮转速(转/分). 利用上面公式,计算气缸直径 $D=95$ mm,活塞行程 $s=115$ mm, $n=1700$ 转/分, $P_e=6.5\ \text{kg/cm}^2$ 的柴油机有效功率:

$$N_e=\frac{6.5\times 3.14\times\dfrac{0.95^2}{4}\times 1.15\times 1700}{12\times 75}$$

$\left(V_h=\pi\left(\dfrac{D}{2}\right)^2 s\right)$.

4. 一捆直径是 2.5 毫米的钢丝重 15.8 公斤,如果钢丝的比重是 7.96 克/厘米^3,求这捆钢丝的长

$\Big($提示:设钢丝长为 l, 那么它的体积是 $\pi r^2 l$(r 是钢丝的半径). 根据体积$=\dfrac{\text{重量}}{\text{比重}}$ 可求得 l. 用对数计算.$\Big)$

5. 某县化肥厂今年生产合成氨 5000 吨, 计划以后每年比上一年增产 20%, 多少年后年产量可达 10000 吨?

6. 某生产队召开批判林彪效法孔老二鼓吹"克己复礼"大会, 贫农李大妈在会上控诉万恶的旧社会:"解放前,我租种了地主四亩地. 有一年因受水灾,颗粒无收. 可是地主的租子却半粒不能少,强迫我写了一张 400 斤大米的借条,月息高达 20%. "试算一算, 一年之后李大妈被地主剥削了多少斤大米?

第三节 计 算 尺

对数计算尺(简称计算尺)是劳动人民应用对数原理而制造的一种计算工具,它结构简单,计算简捷,在工农业生产中应用很广泛.

一、计算尺的构造和刻度原理

1. 计算尺的构造　计算尺由尺身、滑尺和游标三个部分组成(图 10-1).

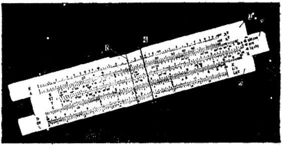


图 10-1

1—尺身(上尺)　2—尺身(下尺)　3—滑尺　4—游标　5—准线

(1) 尺身:计算尺的固定部分,包括上尺和下尺;

(2) 滑尺:在上、下尺间能左右滑动的部分;

(3) 游标:用透明材料制成,套在尺身上面,可以左右滑动.游标中间刻有一条红色细直线,叫做准线,用来读数或对齐数字.

计算尺尺面上刻有各种尺度,一般计算尺都有以下几种

常用尺度：C，D 尺（基本尺，可用来作乘除、比例等运算）；A，B 尺（平方尺，与 C 或 D 尺配合，可求一数的平方或平方根）；K 尺（立方尺，与 C 或 D 尺配合，可求一数的立方或立方根）。此外，还有倒数尺，常用对数尺以及三角函数尺等．这里我们只介绍 C，D 尺的刻度原理和使用方法．

2．C，D 尺的刻度　毛主席教导我们："**大家明白，不论做什么事，不懂得那件事的情形，它的性质，它和它以外的事情的关联，就不知道那件事的规律，就不知道如何去做，就不能做好那件事。**"在使用计算尺前首先要了解尺面上刻度的规律，才能正确而熟练的进行计算．

C 尺和 D 尺是刻度完全相同的两条尺，因此只要介绍一条，例如 D 尺的刻度原理就可以了．

D 尺左端的刻度 1 叫做左指标；右端刻度 10 叫做右指标，它们之间的距离为 1 个长度单位．尺上的每一刻度 x 与左指标 1 的距离为 $\lg x$，即刻度 2, 3, 4, …, 9 与左指标 1 的距离如下表所示：

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y=\lg x$	0	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1

在尺面上的刻度如图 10-2 所示．这样的刻度 1, 2, 3, 4, …, 9, 10 叫做一级刻度．在每相邻的两个一级刻度之间，例如 1

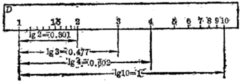


图 10-2

与2之间，再刻上二级刻度1, 2, 3, 4, …, 9, 分别表示1.1, 1.2, 1.3, 1.4, …, 1.9, 它们离开左指标1的距离分别是lg 1.1, lg 1.2, lg 1.3, lg 1.4, …, lg 1.9. 同样，在每相邻的两级刻度之间再刻出三级刻度. 这样，如果要在D尺上读出数6.25, 可先找到一级刻度6; 在一级刻度6和7之间找到二级刻度2; 再在二级刻度2和3之间找到三级刻度5(如无三级刻度可用目测)，此刻度线就表示数6.25.

那么，超过10或小于1的数如何在D尺上读得呢?

从上面有关对数的知识我们知道，数字相同而只有小数点位置不同的数，它们的对数的尾数是相同的，不同的只是首数. 例如10～100的对数:

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$y=\lg x$	1	1.301	1.477	1.602	1.699	1.778	1.845	1.903	1.954	2

由上表与前面1～10的对数表对照，可以看出，从1到2, 3, …的距离，与从10到20, 30, …的距离是相同的，即它们在D尺上的刻度相同. 因此，D尺上虽然只刻了1～10, 但在应用上，可读作10～100, 100～1000, …或0.1～1, 0.01～0.1, …. 也就是数字相同而只有小数点位置不同的数，可在C, D尺上同一刻度处读得. 例如在刻度6.25处，可读作62.5, 625, 0.625, …所以应用C, D尺计算时，读得尺上的读数后，必需进行定位，才能得到所求的答数.

一般C尺刻在滑尺上，D尺刻在定尺上. 运用C, D尺可以进行乘除等运算.

二、利用计算尺作乘除运算

1. 利用C, D尺进行乘法运算 我们先来看，利用两条

相同均匀刻度的直尺 M, N, 可以进行加减运算. 例如求 $2+3$, 运算如图 10-3 所示.

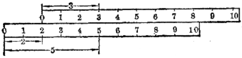


图 10-3

我们已经知道, 根据对数运算法则, 可以把乘、除运算, 转化为加、减运算. 因为 C, D 尺是根据对数原理刻度的完全相同的两条尺, 所以利用 C, D 尺就可以进行乘、除运算.

计算

$$x=a\times b.$$

两边取对数, 得

$$\lg x=\lg (ab)=\lg a+\lg b.$$

上式说明, 为求积 ab, 只要用 C, D 尺作对数加法就可以了. 我们移动滑尺, 使 C 尺左指标 1 对准 D 尺上的 a; 移动游标, 使准线对准 C 尺上的 b; 这时, 在准线下所对 D 尺上的刻度, 就是所求积的读数. 再用估算法定位就得答数. 它的原理如图 10-4 所示.

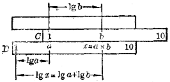


图 10-4

D 尺上的 1 到 a 的距离 $=\lg a$,

C 尺上的 1 到 b 的距离 $=\lg b$,

D尺上的1到x的距离$=\lg x$.

$$\therefore\quad \lg x=\lg a+\lg b,$$

即

$$x=a\times b.$$

这一运算过程,可用表表示如下:

C	1	b
D	a	$(a\times b)$

【例1】 计算2×4.

解:移动滑尺,使C尺左指标1对准D尺2;移动游标,使准线对准C尺4;在准线下所对D尺上的刻度8,就是所求的积.即

$$2\times 4=8.$$

原理如图10-5所示.

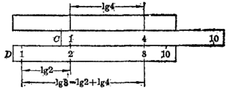


图 10-5

【例2】 计算3×5.

解:如果照例1那样,移动滑尺,将C尺1对D尺3,那么,当准线对准C尺5时,准线已落在D尺外面了(图10-6).因为

$$\lg(3\times 5)=\lg 3+\lg 5=0.477+0.699=1.176$$

已大于1个单位长了,因此不能在D尺上读到答数.但由前

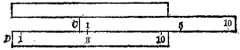


图 10-6

面我们已知道，数字相同而只有小数点位置不同的数，可在 C, D 尺上同一刻度处读得．因此，C 尺右指标 10 和左指标 1 是可以通用的．我们按下面方法进行：

移动滑尺，使 C 尺的右指标 10 对准 D 尺 3；移动游标，使准线对准 C 尺 5；在准线下读得 D 尺 1.5(图 10-7)．经定位，得积 15.

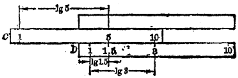


图 10-7

由图可看出：

$$\lg 1.5 = \lg 3 - (1 - \lg 5) = \lg 3 + \lg 5 - 1$$
$$= \lg(3 \times 5) - \lg 10 = \lg \frac{15}{10}.$$

【例 3】 计算 840×0.0015.

解：(1) 求积的读数：C 尺 10 对 D 尺 8.4，使准线对 C 尺 1.5，在准线下读得 D 尺 1.26．这一运算过程可简单表示如下：

C	1.5	10
D	[1.26]	8.4

(2) 用估算定位：

$$840\times0.0015\approx800\times0.002=1.6$$

即积的整数部分是1位数，所以

$$840\times0.0015=1.26.$$

【例4】 计算 4.52×1.5.

解：(1) 求积的读数：运算过程如下：

C	1	1.5
D	4.52	[6.78]

(2) 定位：$4.52\times1.5\approx4.5\times2=9$,

$$\therefore\quad 4.52\times1.5=6.78.$$

【例5】 某农场要在1800亩田里灌0.017米深的水，问需水量共多少(1亩＝666.7米²)？

解：所需水量 $Q=1800\times666.7\times0.017$(立方米)．我们利用 C, D 尺来计算连续相乘.

(1) 求积的读数：先计算 $1800\times666.7=a$ (a 是中间结果，可不必读出)．运算过程如下：

C	6.667	10
D	[a]	1.8

再计算 $a\times0.017$(不动游标，移动滑尺)．运算过程如下：

C	1	1.7
D	a	[2.04]

(2) 定位：

$$1800\times666.7\times0.017\approx1800\times700\times0.02=25200,$$

$\therefore\quad Q=1800\times666.7\times0.017=20400$ (立方米).

即需水量 20400 立方米.

2. 利用 C, D 尺进行除法运算　除法是乘法的逆运算, 计算

$$x=a\div b,$$

两边取对数, 得

$$\lg x=\lg(a\div b)=\lg a-\lg b.$$

上式说明, 用 C, D 尺作对数减法, 就可求得 $a\div b$. 我们把 C 尺 b 对准 D 尺 a, 移动游标, 使准线对准 C 尺 1 (或 10), 那么, 在准线下读得 D 尺上的数 x, 就是所求商的读数(图 10-8). 定位仍可用估算法.

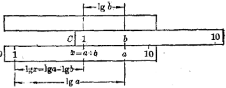


图 10-8

【例 6】 某生产队有早稻面积 263.5 亩, 共收稻谷 317500 斤, 平均亩产多少斤?

解: 平均亩产为 $317500\div263.5$.

(1) 求商的读数: C 尺 2.635 对 D 尺 3.175, 移动游标, 使准线对 C 尺 1. 在准线下读得 D 尺 1.205. 运算过程如下:

C	1	2.635
D	[1.205]	3.175

(2) 定位: $317500\div263.5\approx320000\div300=1067$.

$$\therefore \quad 317500 \div 263.5 = 1205.$$

即平均亩产量为1205斤.

【例7】 计算 $724 \div 13600 \div 0.06$.

解: 连续除法与连续乘法一样,不需读出中间结果.

(1) 先计算 $724 \div 13600$. 运算过程如下:

C	1	1.36
D	[a]	7.24

再计算 $a \div 0.06$. 这时移动滑尺, 使 C 尺 6 对 D 尺 a, 此时在 C 尺 1 下读得 D 尺 8.9. 运算过程如下:

C	6	10
D	a	[8.9]

(2) 定位:

$$724 \div 13600 \div 0.06 \approx 700 \div 14000 \div 0.1$$
$$= 0.5,$$
$$\therefore \quad 724 \div 13600 \div 0.06 = 0.89.$$

3. 利用 C, D 尺进行乘除混合运算 利用 C, D 尺作乘除混合运算 $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$, 一般可先除后乘, 一除一乘交叉进行, 即

$$a \searrow_{d} \nearrow^{b} \searrow_{e} \nearrow^{c}$$

这样,常常可以减少拉动滑尺的次数, 达到计算迅速, 结果较准确的效果.

【例8】 一台电动机, 转速是2930转/分 ($n_{动}$), 带动水泵. 电动机上已有一个直径为140毫米($D_{动}$)的三角皮带轮.

水泵的工作速度是 800 转/分($n_{泵}$)，打滑系数*取 1.01. 问水泵皮带轮的直径($D_{泵}$)应该是多少？

解：电动机和水泵的转速和皮带轮直径的关系是

$$n_{动}\times D_{动}=\text{打滑系数}\times n_{泵}\times D_{泵}.$$

所以

$$D_{泵}=\frac{n_{动}\times D_{动}}{\text{打滑系数}\times n_{泵}}=\frac{2930\times 140}{1.01\times 800}.$$

移动滑尺，使 C 尺 1.01 对 D 尺 2.93(即 $2.93\div 1.01$)；移动游标，使准线对 C 尺 1.4 (即 $2.93\div 1.01\times 1.4$)；然后再移动滑尺，使 C 尺 8 在准线下(即 $2.93\div 1.01\times 1.4\div 8$). 这时在 C 尺 10 下读得 D 尺 5.07, 就是所求 $D_{泵}$ 的读数. 估算定位，得

$$D_{泵}=507\text{ 毫米}.$$

即水泵皮带轮的直径应该是 507 毫米.

4. 比例　把计算尺拉到任意位置，C 尺与 D 尺上所有互相对着的数成比例. 例如 C 尺 1 对着 D 尺 2, 则 C 尺 2, 3, 4, … 分别与 D 尺上的 4, 6, 8, … 相对应着. 它们的比值都是 $\frac{1}{2}$ (图 10-9). 这样利用 C, D 尺计算比例问题就非常方便.

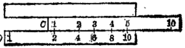


图 10-9

【例 9】 用"50%稻瘟净乳剂"防治稻瘟病，在配制时要求乳剂与水的重量比是 1:800. 15 斤乳剂要加水多少斤？

* 皮带在皮带轮上是要打滑的，所以计算时要乘上一个打滑系数. 一般三角皮带的打滑系数是 1.01～1.02, 平皮带是 1.02～1.05.

解：设 15 斤乳剂要加水 x 斤，按题意得

$$\frac{1}{800}=\frac{15}{x}.$$

用计算尺计算如下：

C	1.5	10
D	[1.2]	8

根据比值定位，

$$x=12000\ (斤).$$

【例 10】 某生产队全年总收入 55400 元，其中农业收入 47000 元，副业收入 5850 元，畜牧业收入 2550 元，各占百分比多少？

解：这是一个百分比问题，同样可按上法计算．按题意可得

$$\frac{55400}{100}=\frac{47000}{x}=\frac{5850}{y}=\frac{2550}{z}$$

使 C 尺 5.54 对着 D 尺 10，在 C 尺 4.7 下读得 D 尺 8.48(x)；在 C 尺 2.55 下读得 D 尺 4.6(z)．但 C 尺 5.85 已落在 D 尺外面，所以要调换指标．移动滑标，使准线对着 C 尺左指标 1，拉动滑尺，使 C 尺右指标 10 对着准线，在 C 尺 5.85 下读得 D 尺 1.06(y)．运算过程如图 10-10．

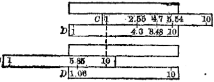


图 10-10

经估算定位，可得 $x=84.8\%$，$y=10.6\%$，$z=4.6\%$．即农业收入占总收入的 84.8%，副业收入占 10.6%，畜牧业收入占 4.6%．

计算尺除了长条形的外，也有做成圆盘形的，如"农村常用计算盘"(图 10-11)．这种计算盘由上、下盘组成．上盘刻有乘除尺和倒数尺(用于求一数的倒数)，可以左右旋转．下盘固定，刻有乘除尺和相应的百分比尺度(用于计算增加或减少的百分比)．它的刻制原理和使用方法与长条形的相同，这里不作介绍了．

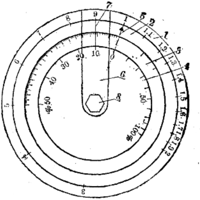


图 10-11　农村常用计算盘

1—下盘乘除尺　2—上盘乘除尺　3—上盘倒数尺　4—下盘百分比尺　5—指标　6—滑标　7—准线　8—螺钉螺帽

小　结

1．对数计算尺是利用对数原理刻度的计算尺．利用基本尺度 C，D 尺，可进行乘、除、比例等运算．

2. C, D 尺进行乘法运算的方法：

C	左指标(右指标)	乘数
D	乘数	[积]

根据尺上读数，用估算定位，得到所求的积.

3. C, D 尺进行除法运算的方法：

C	除数	左指标(右指标)
D	被除数	[商]

根据尺上读数，用估算定位，得到所求的商.

4. 用 C, D 尺作乘除混合运算，可以"先除后乘，一除一乘交叉进行". 用 C, D 尺作比例计算也很方便.

第四节 算 图

一、什么是算图

算图(又称诺模图)是根据数学原理，把某一公式中所含变量的函数关系，绘制成由几条图尺组成的一种图形. 利用这种特殊图形，可以根据某几个变量的已知值，在图上直接确定另一变量的数值. 算图所得结果虽然是近似值，但在大多数的情况下，已能满足要求，因此它在工农业生产中得到了广泛的应用. 下面举一个运用算图的例子.

生产队饲养场为了随时了解猪的生长情况，经常要估计生猪的重量(毛重). 饲养场的知识青年通过大量的调查和实践，得出了估计生猪重量的经验公式：

$$w=4.85\,s^2l,$$

其中 s 是猪的胸围长，l 是猪的体长(单位是尺)；w 是猪的重量(单位是斤).

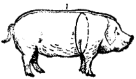


图 10-12

因此，只要量出猪的体长 l，胸围 s（图 10-12），代入上面公式，就可以估算得猪的重量*.

但这样计算比较繁复．我们可以根据生猪估重公式，绘制出由三个变量 w，s，l 所对应的三条图尺，组成生猪估重算图（图 10-13）．在量得猪的胸围长 s 和体长 l 后，分别在 s 图尺和 l 图尺上找出它们的对应点，将此两点用直尺连成一直线，直尺边缘穿过 w 尺上的一点，这点的读数就是所求生猪的重量（斤数）.

例如由图 10-13 中的虚线可以看出：

当 $s=3.1$ 尺，$l=3$ 尺时，得 $w=140$ 斤；

当 $s=3$ 尺，$l=3.2$ 尺时，得 $w=140$ 斤；

当 $s=3.4$ 尺，$l=3.6$ 尺时，得 $w=200$ 斤.

从上面的例子我们看到了利用算图代替公式计算的优越

---

* 一般地，形如 $w=ks^2l$ 的经验公式，其中 k 是常数，对牛、羊等牲畜估重都可适用．对于不同的牲畜有不同的常数 k．k 可以这样确定：先测定某种牲畜若干头的体重、胸围、体长，根据 $k=\frac{w}{s^2l}$ 得到各个不同的 k 值，然后取它们的平均值．上面猪的估重公式中的常数 4.85，对估算重约 130 斤以上的猪比较准确．量猪时应注意：（1）量体长时应从猪的两耳根连线的中点起，到尾根为止；（2）量胸围时应从猪的前腿夹往后两个指头宽处围绕猪身一周.

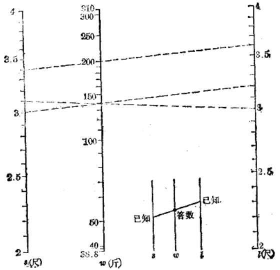


图 10-13

性．那么怎样根据公式来绘制这种算图呢？下面我们介绍简单算图的绘制原理和方法．

二、算图的绘制

一般算图是由三条或更多条图尺组成的．结构最简单的算图是由互相平行的直线图尺组成的，叫做平行图尺算图．这里我们只介绍平行图尺算图．

1．图尺方程　绘制平行图尺算图就是绘制几条平行的直线图尺．直线图尺是根据图尺方程，应用坐标法来绘制的，为此有必要先了解一下有关图尺方程的知识．

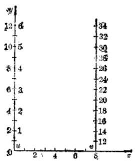


图 10-14

设有变量 u 和 v 的二条平行直线图尺，如果以 u 图尺所在直线为 y 轴，垂直于 u 图尺的任一直线为 x 轴，那么得到如图 10-14 所示的直角坐标系．我们从图中可以看到，u 图尺上任一点的横坐标都为 0，即 $x=0$；纵坐标 y 与 u 值之间的关系是 $y=2u$．所以 u 图尺上每一点的坐标应满足方程

$$\begin{cases} x=0, \\ y=2u. \end{cases}$$

这就是 u 图尺方程．同样，从图中可以看出，v 图尺上每一点的横坐标都为 8，即 $x=8$；纵坐标 y 与 v 之间的关系为

$$y=\frac{1}{2}v-5.$$

所以 v 图尺的方程是

$$\begin{cases} x=8, \\ y=\frac{1}{2}v-5. \end{cases}$$

一般地，我们把

$$\begin{cases} x=a, \\ y=y(u), \end{cases}$$

叫做直线图尺方程，其中 a 是常数.

根据直线图尺方程，可以绘制出直线图尺.

【例 1】 根据图尺方程

$$\begin{cases} x=30, \\ y=10u+2, \end{cases}$$

绘制变量 u 的图尺. 已知变量 u 的变化范围为 $1\leqslant u\leqslant 4$.

解：(1) 在坐标系 Oxy 中作一直线 $x=30$;

(2) 由函数式 $y=10u+2$ 计算变量 u 与 y 的对应值，列表如下：

u	1	2	3	4
y	12	22	32	42

(3) 在直线 $x=30$ 上，根据表中每一对数据，画出 u 图尺的刻度线，如图 10-15 所示.

现在我们先讨论平行图尺算图中变量之间的关系的一般公式，然后根据这个公式导出平行图尺的图尺方程，并绘制算图.

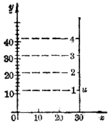


图 10-15

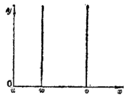


图 10-16

设有一个平行图尺算图，它由 u 图尺、v 图尺和 w 图尺组

成. 以 u 图尺作为 y 轴, 与 u 图尺垂直方向的任意直线为 x 轴, 建立直角坐标系, 如图 10-16 所示. 设 u 和 v 图尺之间的距离为 H; w 图尺对于 u, v 两图尺距离之比为 $m:n$. 由比例关系, 可得到 w 图尺与 u 图尺之间的距离为 $\frac{m}{m+n}H$. 那么这三个图尺的图尺方程分别是

u 图尺方程:

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=y_1(u); \end{cases}$$

v 图尺方程:

$$\begin{cases} x_2=H, \\ y_2=y_2(v); \end{cases}$$

w 图尺方程:

$$\begin{cases} x_3=\dfrac{m}{m+n}H, \\ y_3=y_3(w). \end{cases}$$

现在我们讨论 u, v 和 w 三个变量之间的关系.

前面我们已经看到, 利用算图进行运算时, w 尺上表示答数的点 $\left(\frac{m}{m+n}H,\ y_3(w)\right)$, 是在 u 尺上表示已知数的点 $(0,\ y_1(u))$ 和 v 尺上表示已知数的点 $(H,\ y_2(v))$ 的连线上. 通过 $(0,\ y_1(u))$ 和 $(H,\ y_2(v))$ 两点的直线方程是

$$\frac{y-y_1(u)}{x-0}=\frac{y_2(v)-y_1(u)}{H-0}.$$

由于 w 图尺上的点 $\left(\frac{m}{m+n}H,\ y_3(w)\right)$ 在这条直线上, 所以

$$\frac{y_3(w)-y_1(u)}{\dfrac{m}{m+n}H-0}=\frac{y_2(v)-y_1(u)}{H}.$$

化简，得

$$(m+n)y_3(w)-(m+n)y_1(u)=my_2(v)-my_1(u),$$

$$(m+n)y_3(w)=ny_1(u)+my_2(v).$$

两边除以 $m\cdot n$，得

$$\frac{m+n}{m\cdot n}y_3(w)=\frac{1}{m}y_1(u)+\frac{1}{n}y_2(v).$$

设 $\quad f_1(u)=\frac{1}{m}y_1(u);\quad f_2(v)=\frac{1}{n}y_2(v);$

$$f_3(w)=\frac{m+n}{m\cdot n}y_3(w).$$

那么上式就可表示成

$$f_3(w)=f_1(u)+f_2(v).\tag{1}$$

这就是平行图尺算图中表示变量之间关系的一般公式．如果一个公式能化成这种形式，那么就可以绘出含有三条平行直线图尺的算图．

由 $\quad f_1(u)=\frac{1}{m}y_1(u),\quad f_2(v)=\frac{1}{n}y_2(v),$

$$f_3(w)=\frac{m+n}{m\cdot n}y_3(w)$$

可得

$$y_1(u)=mf_1(u);$$

$$y_2(v)=nf_2(v);$$

$$y_3(w)=\frac{m\cdot n}{m+n}f_3(w).$$

以此分别代入图尺方程，得三个变量的图尺方程：

u 图尺方程：

$$\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=mf_1(u);\end{cases}\tag{2}$$

v 图尺方程：

$$\begin{cases} x_2 = H, \\ y_2 = nf_2(v); \end{cases} \tag{3}$$

w 图尺方程：

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{m}{m+n} H, \\ y_3 = \dfrac{mn}{m+n} f_3(w). \end{cases} \tag{4}$$

有了上列图尺方程，就可以绘制平行图尺算图了.

2. 平行图尺加法算图　现在我们来绘制计算两数之和 $w=u+v$ 的算图. 步骤如下：

(1) 观察所求算图公式是否符合公式(1). 很明显，如果令 $f_1(u)=u$, $f_2(v)=v$; $f_3(w)=w$, 公式 $w=u+v$ 就成为

$$f_3(w)=f_1(u)+f_2(v)$$

的形式. 因此它是平行图尺算图. 我们可以得到加法算图的图尺方程如下：

u 图尺方程：

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = mu; \end{cases}$$

v 图尺方程：

$$\begin{cases} x_2 = H, \\ y_2 = nv; \end{cases}$$

w 图尺方程：

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{m}{m+n} H, \\ y_3 = \dfrac{m \cdot n}{m+n} w. \end{cases}$$

(2) 计算图尺系数，确定图尺方程. m, n 和 $\dfrac{m \cdot n}{m+n}$ 叫做

这三个图尺的图尺系数，它们的值可由图尺的长度及变量的变化范围来确定(图尺长度可以自己确定，以方便为好；经验公式中变量的变化范围，根据问题的实际情况而定)．

设图尺的长度为 100 毫米，u 和 v 图尺之间的距离 $H=80$ 毫米．又根据实际情况，变量 u 和 v 的变化范围是 $0\leqslant u\leqslant 10$，$0\leqslant v\leqslant 10$，从而由 $w=u+v$ 得出 w 的变化范围是 $0\leqslant w\leqslant 20$．由于 $0\leqslant u\leqslant 10$，所以它的长度(100 毫米)等于图尺上标值为 $u=0$ 和 $u=10$ 两点之间的距离，也就是 y 坐标之差(y 轴的单位长度是1毫米)．根据 u 图尺方程，可求出 y 坐标之差是

$$y_2(10)-y_1(0)=m\times 10-m\times 0=10m,$$

即

$$10\,m=100,$$

因此

$$m=10,$$

同理求得

$$n=10,$$

从而

$$\frac{mn}{m+n}=\frac{10\times 10}{10+10}=5,$$

$$\frac{m}{m+n}H=\frac{10}{10+10}\times 80=40.$$

把所得图尺系数分别代入图尺方程，得 $w=u+v$ 的三个图尺方程是

u 图尺方程：

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=10u; \end{cases}$$

v 图尺方程：

$$\begin{cases} x_2=80, \\ y_2=10v; \end{cases}$$

w 图尺方程：

$$\begin{cases} x_3=40, \\ y_3=5w. \end{cases}$$

(3) 根据上述图尺方程，计算变量 u, v, w 在变化范围内变动的函数值 y，列表如下：

u(或v)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1(或y_2)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…	20
y_3	0	5	10	15	20	25	30	35	40	…	100

(4) 绘制图尺．在直角坐标系 Oxy 中，先画三条直线：

$$x_1=0, \quad x_2=80, \quad x_3=40.$$

然后在这三条直线上根据 u, v, w 和 y 的对应值，分别在 u, v, w 尺上画出刻度(图 10-17)．

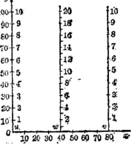


图 10-17

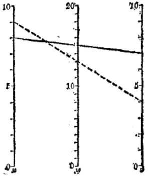


图 10-18

通常在算图中不画出直角坐标系，如图 10-18 所示。

在图 10-18 中，如果用直线连结图尺 u 上的点 8 与 v 尺上的点 7，那么这直线与 w 尺相交点 15 就是 8 与 7 之和．用同样方法可得到 9 与 4 之和为 13（图中虚线所示）．用这样的方法，就可以求得 u 和 v 在其变化范围内的任意数值的和．

3．平行图尺乘法算图　根据上面绘制加法算图的步骤，同样可以绘制出计算两数之积 $w=u\cdot v$ 的平行图尺算图．

(1) 将 $w=u\cdot v$ 两边取对数，得

$$\lg w=\lg u+\lg v.$$

设 $f_1(u)=\lg u$，$f_2(v)=\lg v$，$f_3(w)=\lg w$，那么上式就是

$$f_3(w)=f_1(u)+f_2(v),$$

因此从算式 $w=u\cdot v$，我们可以绘制出含有三个平行直线图尺的算图．

将 $f_1(u)=\lg u$，$f_2(v)=\lg v$，$f_3(w)=\lg w$ 代入图尺方程，得

u 图尺方程：

$$\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=m\lg u;\end{cases}$$

v 图尺方程：

$$\begin{cases}x_2=H,\\ y_2=n\lg v;\end{cases}$$

w 图尺方程：

$$\begin{cases}x_3=\dfrac{m}{m+n}H,\\ y_3=\dfrac{m\cdot n}{m+n}\lg w.\end{cases}$$

(2) 设图尺长度为100毫米，u，v两尺之间距离为80毫米，u，v的变化范围是$1\leqslant u\leqslant 10$；$1\leqslant v\leqslant 10$，从而得w的变化范围是$1\leqslant w\leqslant 100$，$u$图尺标值是1和10的两点之间的距离是100毫米，即

$$y_1(10)-y_1(1)=100,$$

就是

$$m\lg 10-m\lg 1=100,$$

由此得

$$m=100\ (\text{毫米}).$$

同理可得

$$n=100\ (\text{毫米}).$$

并且

$$\frac{m\cdot n}{m+n}=\frac{100\times 100}{100+100}=50\ (\text{毫米}),$$

$$\frac{n}{m+n}H=\frac{100}{100+100}\times 80=40\ (\text{毫米}).$$

把所得图尺系数分别代入图尺方程，得$w=u\cdot v$的三个图尺方程是

u图尺方程：

$$\begin{cases} x_1=0,\\ y_1=100\lg u;\end{cases}$$

v图尺方程：

$$\begin{cases} x_2=80,\\ y_2=100\lg v;\end{cases}$$

w图尺方程：

$$\begin{cases} x_3=40,\\ y_3=50\lg w.\end{cases}$$

(3) 由上述图尺方程可计算出变量 u, v, w 与 y 的对应值. 列表如下:

u (或 v)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1 (或 y_2)	0	30.10	47.71	60.21	69.90	77.82	84.51	90.31	95.42	100

w	1	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y_3	0	50	65.05	73.85	80.10	84.95	88.91	92.25	95.15	97.71	100

(4) 绘制图尺. 根据上面一系列数据, 就可以绘制出乘法算图如图 10-19 所示.

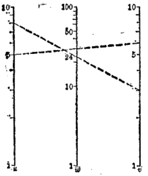


图 10-19

利用这个算图, 就可迅速地求得两数相乘的积. 例如 $u=8$, $v=3$, 即可求得 $w=24$; $u=5$, $v=6$, 即可求得 $w=30$.

4. 生猪估重算图的绘制

现在我们来绘制本节开始时提出的生猪估重公式的算图.

生猪估重的经验公式是

$$w=4.85s^2l,$$

其中变量是 s, l, w. 根据实际情况, s, l 的变化范围分别是 $2\leqslant s\leqslant 4$(尺)和 $2\leqslant l\leqslant 4$(尺), 由上面的公式可得 w 的变化范围是 $38.8\leqslant w\leqslant 310$(斤).

对等式 $w=4.85s^2l$ 两边取对数, 得

$$\lg w=\lg 4.85+2\lg s+\lg l,$$

就是

$$\lg w-0.6875=2\lg s+\lg l.$$

设 $f_1(s)=2\lg s$, $f_2(l)=\lg l$, $f_3(w)=\lg w-0.6857$, 那么上式化为

$$f_3(w)=f_1(s)+f_2(l),$$

所以估重公式 $w=4.85s^2l$ 也可以绘制成具有三条平行直线图尺的算图．它们的图尺方程是

s 图尺方程：

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=2m\lg s; \end{cases}$$

l 图尺方程：

$$\begin{cases} x_2=H, \\ y_2=n\lg l; \end{cases}$$

w 图尺方程：

$$\begin{cases} x_3=\dfrac{m}{m+n}H, \\ y_3=\dfrac{mn}{m+n}(\lg w-0.6857). \end{cases}$$

设图尺长 100 毫米，s, l 尺间的距离 $H=100\,\mathrm{mm}$．对于 s 图尺有

$$f_1(4)-f_1(2)=100,$$

就是

$$2m(\lg 4-\lg 2)=100,$$

化简得

$$m=166.1\ (\text{毫米}).$$

对于 l 图尺，同样有

$$f_2(4)-f_2(2)=100,$$

就是

$$n(\lg 4-\lg 2)=100,$$

得

$$n=332.2\ (\text{毫米}).$$

那么

$$\frac{mn}{m+n}=\frac{166.1\times 332.2}{166.1+332.2}=110.7\text{（毫米）},$$

$$\frac{m}{m+n}H=\frac{166.1}{166.1+332.2}\cdot 100=33.3\ \text{（毫米）}.$$

把图尺系数分别代入 s, l, w 的图尺方程，得

s 图尺方程：

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=332.2\lg s; \end{cases}$$

l 图尺方程：

$$\begin{cases} x_2=100, \\ y_2=332.2\lg l; \end{cases}$$

w 图尺方程：

$$\begin{cases} x_3=33.3, \\ y_3=110.7(\lg w-0.6857). \end{cases}$$

根据上列 s, l, w 的图尺方程，分别计算变量 s, l, w 在变化范围内变动时，对应的纵坐标 y 的值，列表如下：

s（或 l）	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
y_1（或 y_2）	100	107.03	113.75	120.16	126.30	132.18	137.86
s（或 l）	2.7	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3
y_1（或 y_2）	143.31	148.56	153.61	158.49	163.24	167.79	172.25
s（或 l）	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4
y_1（或 y_2）	176.56	180.75	184.80	188.76	192.61	196.36	200

w	33.8	39	40	50	60	70	80	90
y_3	100	100.23	101.45	112.17	120.94	128.35	134.77	140.42
w	100	110	120	130	140	150	160	170
y_3	145.53	150.08	154.26	158.10	161.67	164.99	168.09	171
w	180	190	200	250	300	310		
y_3	173.75	176.36	178.81	189.54	198.31	199.89		

绘制图尺．先在直角坐标系中画三条直线：

$$x_1=0;\ x_2=100;\ x_3=33.3.$$

然后再在这三条直线上按上列表中的 s, l, w 和 y 的对应值，分别画出刻度线，就得 s, l, w 图尺如图 10-13 所示．这样，生猪估重公式 $w=4.85s^2l$ 的算图就绘制成了．

三、算图在农村计算中的应用举例

农村中常常要进行的估堆、测产等各种计算，都可以按上面的方法，把常用计算公式绘制成各种算图．现在举例如下：

1．估堆　遵照毛主席关于"深挖洞，广积粮，不称霸"的教导，广大贫下中农战天斗地夺丰收．为了及时估算出堆在打麦场上麦子的重量，他们把麦子尽量堆得圆而高，形成自然

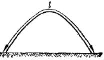


图 10-20

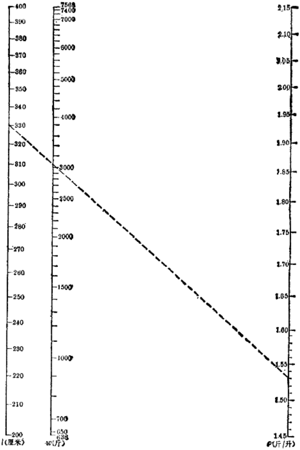

400
390
380
370
360
350
340
330
320
310
300
290
280
270
260
250
240
230
220
210
200
l(厘米)
7568
7400
7000
6000
5000
4000
3000
2500
2000
1500
1000
700
650
638
w(斤)
2.15
2.10
2.05
2.00
1.95
1.90
1.85
1.80
1.75
1.70
1.65
1.60
1.55
1.50
1.45
ρ(斤/升)

图 10-21

坡面，根据实践经验，总结出麦堆的估重经验公式是

$$w=55\times10^{-6}\rho l^{3}*,$$

其中 w(斤)是麦堆重量，l(厘米)是麦堆斜坡总长(图 10-20)，ρ(斤/升)是麦的比重.

我们可以将上面的公式制成如图 10-21 所示的算图.

【例 2】 有一堆小麦，量得斜坡长 $l=330$ cm，并称得这种小麦一升重 1.53 斤(即比重 ρ)，利用算图 10-21，计算这堆麦的重量.

解：如图 10-21 所示，用直尺连结 l 尺上的 330 和 ρ 尺上的 1.53，直尺和 w 尺的交点 3020 斤，就是这堆麦的重量.

2. 测产　我们已知道，预测稻麦亩产量的公式是

$$\text{亩产量 } w(\text{斤/亩})=\frac{\text{每亩穗数}u\times\text{每穗粒数}v\times\text{千粒重}t}{1000\times500}.$$

这个测产公式中有四个变量：u，v，t 和 w，因此绘制这个算图就比较复杂. 我们可以这样来进行：

在公式

$$w=\frac{uvt}{1000\times500}$$

中，令 $\lambda=uv$，并将分子，分母同时乘以 2，得

$$w=\frac{2\lambda\cdot t}{10^{6}}=2\lambda t\times10^{-6}.$$

因此，所求作的算图可由 $\lambda=uv$ 算图和 $w=2\lambda t\times10^{-6}$ 的算图复合而成. 绘制时，可先根据 $\lambda=uv$ 画出 u，v 和 λ 图尺，再依 λ 图尺为 y 轴，按 $w=2\lambda t$ 画出 t，w 图尺. (由于乘法算图

* 一般地，形如 $w=kl^{3}$ 的估堆经验公式，其中 k 是常数，对其他有固定形状的成堆物，如玉米、稻谷堆等都适用. 这里 k 值的确定，可根据生猪估重公式中确定 k 值的类似方法进行(见第 167 页注).

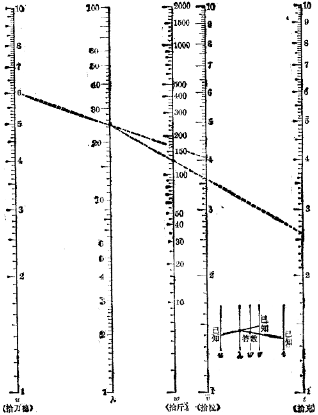


图 10-22

的图尺是对数刻度，10^{-6} 仅关系到定位，所以绘制图尺时可以不考虑.）最后得到如图 10-22 所示的预测稻麦亩产量的算图. 具体绘制过程从略.

【例 3】 利用测产公式的算图，求每亩 60.5 万穗，每穗结实粒 40.71 粒，千粒重 26 克的早稻亩产量.

解：在 u 尺上找出数 60.5，v 尺上找出数 40.71 的对应点，连结这两点的直线与 λ 尺得一交点(不必读出). 连结该点和在 t 尺上数 26 的对应点的直线，与 w 尺相交于 128 (图中虚线所示)，就是早稻亩产约 1280 斤.

上面我们学习了平行图尺算图的绘制和应用. 在实际工作中，根据各种不同形式的方程，还有 N 形或含有曲线等的算图，这里不作介绍了.

小　结

1．算图是根据数学原理，把某一公式中所含变量的函数关系，绘制成由几条图尺组成的一种图形. 利用这种图形，根据某些变量的已知值，能在图上立即确定另一变量的数值.

2．平行图尺算图的绘制步骤:

(1) 将经验公式变形成如下的形式:

$$f_3(w)=f_1(u)+f_2(v).$$

(2) 由图尺的长度及变量的变化范围，计算图尺系数 $m, n, \frac{mn}{m+n}$，并确定图尺方程:

u 图尺方程

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=mf_1(u); \end{cases}$$

v 图尺方程

$$\begin{cases} x_2=H, \\ y_2=nf_2(v); \end{cases}$$

w 图尺方程

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{m}{m+n} H, \\ y_3 = \dfrac{mn}{m+n} f_3(w). \end{cases}$$

(3) 根据图尺方程，计算变量 u, v, w 在变化范围内变动的函数值 y，列成表格.

(4) 根据表格中 u, v, w 和 y 的对应值绘制图尺.

第十一章　优选法和统筹方法

第一节　优　选　法

一、优选法的基本方法

1．什么是优选法　在日常生活中，我们常会碰到这类问题：例如煮饭，水放多了会煮成烂饭，放少了又会煮成“夹生饭”．水该放多少，饭才不烂又不生？

在生产斗争和科学实验中，这类问题就更多．例如：为炼一种特种钢，需要加某种特殊元素，加多少才使炼得的钢的性能最好？用“九二〇”、“七〇二”、“矮壮素”三种药物混合喷雾在棉花上，可防治棉花落铃落蕾，这三种药物以什么比例混合，才使防治效果最好？为了多养猪，养肥猪，怎样搭配饲料，既使猪长膘快，又能节约粮食？……象这一类为了达到高产、优质、低消耗的目的，对有关因素进行选择，以确定其最佳点的问题，叫做优选问题．

为了选取最佳点——一般叫做好点，往往要做大量的试验，经过对比才能得到．例如，为炼某特种钢，炼钢时需要加入一种特种元素．从理论上估算，每吨钢含该特种元素在1000～2000克之间，那么最好的含量是多少呢？假设我们从1001克开始，每隔1克做一次试验．这样，要做了1000次试验，比较结果，才能找出最好点，即加特种元素的最优量．这就

得化费大量人力、物力和时间. 这种在试验范围内平均安排试验点的方法(通常称为均分法),不符合多快好省的原则. 那么,有什么方法可以帮助我们能较快地找到最佳点呢?

优选法就是利用数学原理,合理安排试验点,减少试验的盲目性,以求又准又快地找到最佳值的一种试验方法.

2. 0.618 法 上面所说的冶炼特种钢的问题,要考察的因素只有一个,即某一特种元素的加入量,我们把它叫做单因素的优选问题. 下面即以此为例,说明怎样用 0.618 法来解决单因素的优选问题.

为了说明方便,不妨用一张纸条,表示试验的范围. 纸条左端表示 1000 克,右端表示 2000 克(图 11-1). 这样,纸条上每一条垂直方向的线段,都可以表示特种元素的某个加入量,如纸条中线就表示 1500 克.

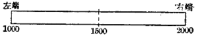


图 11-1

第一个试验点,取在整个纸条长度的 0.618 处. 该处所表示的加入量是

$$1000+(2000-1000)\times 0.618=1618(\text{克}).$$

我们在 0.618 处画一条红线,表示第一个试验点(图 11-2).

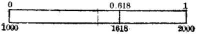


图 11-2

第二个试验点取在哪里呢? 把纸条对折,得到与 0.618 处红线,关于纸条中线对称的一条线. 它所表示的加入量,就是第二个试验点所在处(图 11-3). 显然,

第二点 $=1000+(2000-1618)=1382$(克).

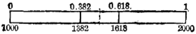


图 11-3

从上面的计算可看出:

第一点＝左端点＋(右端点－左端点)×0.618,

后一点＝左端点＋右端点－前一点.

事实上，后一式子对于以后各个试验点的计算都是适用的，是计算试验点位置的一般公式.

做了两次试验以后，就可以比较它们的结果. 假定加入1382克特种元素所得的钢，比加1618克的质量好，我们就去掉1618～2000克这一段(如果加1618克比加1382克好，那么剪去1382克左边这一段). 就是说，不必再在1618～2000克之间寻找好点了. 显然，在剩下的纸条中，留着一个较好的试验点：1382克(图11-4).

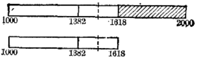


图 11-4

于是确定第三个试验点的位置. 就象确定第二个试验点的位置一样，把剩下的纸条再对折，得到与1382克关于中心线对称的点，这就是第三个试验点(图11-5). 根据前面的公式

第三点＝左端点＋右端点－第二点

$=1000+1618-1382=1236$(克).

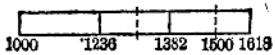


图 11-5

注意：这里的中心线、左端点、右端点，都是对剪去一段后剩下的纸条而讲的.

然后比较加1236克与1382克两次试验结果，如果还是加1382克的好，就剪去1236克左边的那一段.

总之，沿着坏点剪开，留下好点所在的那一段，然后按照依中对折的原则，找到新试验点的位置．这样，一次比一次更接近最佳点，直到试验符合生产要求为止.

【例1】 小麦用植物生长调节剂"七〇二"浸种，能提高出芽率，促进生长．但用药浓度多少效果最好？某农业试验站对"七〇二"的浓度用0.618法进行优选．试验范围是10～30单位浓度，做了三次试验，就找到了合适的浓度．试验过程如下：

第一个试验点：

$$10+(30-10)\times 0.618=22.36\text{(单位浓度)},$$

第二个试验点：

$$10+30-22.36=17.64\text{(单位浓度)}.$$

比较两次试验结果，第二次比第一次的好．于是去掉22.36单位浓度以上的范围，在10～22.36单位浓度范围中再优选.

第三个试验点：

$$10+22.36-17.64=14.72\text{(单位浓度)}.$$

测定结果表明，当"七〇二"浓度为14.72单位浓度时，发芽率已达98％，比前二次的好．同时与清水浸种的对照，发芽时

间提早二天，发芽后的麦苗株高根长，叶片数多．因此确定小麦用 14.72 单位浓度的“七〇二”浸种．

整个试验过程如图 11-6 所示：

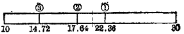


图 11-6

【例 2】 某农修厂修补轮胎，补胎的质量与温度有关：温度太高，熔化过头，胎壁易薄；温度太低，胶化不了，火补时间就长．工人们为了提高补胎质量，对温度进行优选．试验范围 40～60°C，过程如下：

第一点：40＋(60－40)×0.618＝52.3°C(实取 52°C)，

第二点：40＋60－52.3＝47.7°C(实取 48°C)．

第一点比第二点好，去掉 47.7°C 以下的范围，在 47.7～60°C 范围内再优选．

第三点：47.7＋60－52.3＝55.4°C(实取 55°C)．

第三点比第一点好，去掉 52.3°C 以下的范围，在 52.3～60°C 范围内优选．

第四点：52.3＋60－55.4＝56.9°C(实取 57°C)．

第四点不如第三点好．可以确定，温度以 55°C 为好．投产以后，工效提高 2 倍，质量好，用户满意．

3．分数法 “对于具体情况作具体的分析”．应用 0.618 法进行试验，从理论上讲，试验可以一直做下去，直到找出满意的点为止．但在许多实际问题中，由于各种原因(例如进行一次试验费用较高等)，只允许做一定次数的试验．这时，可用分数法来安排试验．

还是用上面的例子，确定特种元素在1000～2000克之间合适的加入量．要求通过一定次数的试验，就能得出结论．

如果要求试验2次就得到结论，那么，我们把试验范围三等分 第一试验点取在全长的2/3处(用2/3代替0.618)，同样按依中对折的原则得到第二个试验点，即在全长的1/3的地方(图11-7)．

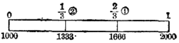


图 11-7

如果要求试验三次就得出结论，那么，我们把试验范围五等分．第一个试验点取在全长的3/5(1600克，用3/5代替0.618)处，然后对折，得第二个试验点，即在全长的2/5(1400克)处．比较两次试验结果，假设第一点比第二点好，那么去掉1000～1400克这一段．再对折得第三点，即全长的4/5处(图11-8)．以其中较好的结果作为结论．

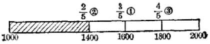


图 11-8

同样，如果要求试验四次找到好点，那么我们把试验范围八等分，第一点在全长的5/8处；要求五次试验找到好点，可分试验范围为十三等分，第一点在全长的8/13处；……

那么，任意给定试验次数K(K是自然数)，如何确定等

分数和第一个试验点的位置呢?

我们先看下面一列数.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots \qquad (1)$$

顺次以 $F_0, F_1, F_2, \cdots, F_n, F_{n+1}, \cdots$ 表示,不难发现,这列数开头两个数都是1,而后每个数都是它前面两个数之和:

$$F_0=1;$$

$$F_1=1;$$

$$F_2=F_1+F_0=2;$$

$$F_3=F_2+F_1=2+1=3;$$

$$F_4=F_3+F_2=5;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

如果取 (1) 中每相邻两数写成分数,以其中较小的作分子,较大的作分母,那么,就得到一列分数:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \cdots, \frac{F_n}{F_{n+1}}, \cdots \qquad (2)$$

现在,我们可以回答刚才提出的问题了. 当给定试验次数是 K 次时(K 是自然数),按(1)将试验范围分成 F_{K+1} 等分,再按(2)将第一个试验点选在$\frac{F_K}{F_{K+1}}$处,以后按照依中对折原则(即后一点=左端点+右端点-前一点)做下去. 做完 K 次试验后,就得到试验范围内 $F_{K+1}-1$ 个等分点中的最好点.

为了使用方便,我们把分数法排成如下表格:

预给试验次数 K	等分数 F_{K+1}	第一试验点 $\frac{F_K}{F_{K+1}}$
2	3	全长的 $\frac{2}{3}$ 处
3	5	全长的 $\frac{3}{5}$ 处
4	8	全长的 $\frac{5}{8}$ 处
5	13	全长的 $\frac{8}{13}$ 处
6	21	全长的 $\frac{13}{21}$ 处
7	34	全长的 $\frac{21}{34}$ 处
8	55	全长的 $\frac{34}{55}$ 处
9	89	全长的 $\frac{55}{89}$ 处
10	144	全长的 $\frac{89}{144}$ 处
⋮	⋮	⋮
K	F_{K+1}	全长的 $\frac{F_K}{F_{K+1}}$ 处
⋮	⋮	⋮

例如，给定试验次数为7，从表格上可知，应将试验范围34等分(即 F_8)，第一试验点在 $\frac{21}{34}$ 处$\left(即 \frac{F_7}{F_8}\right)$。如果采用均分法，需要做33次试验才能达到同样的结果.

【例3】 水稻种子发芽试验，一般规定，在20～30°C条件下，经过十天才可测定它的发芽率．为缩短测定发芽率时

间，某地区农科所选用简单方便的热水瓶快速催芽法．方法是：热水瓶内放 2 斤温水，用夏麻布将水稻种子包好，浸入瓶内水中；十二小时后将种子袋提起，挂在瓶内水面以上；24 小时后将种子用清洁的温水冲洗，瓶内换水一次，并减为 1.5 斤，保持原有水温，种子袋仍悬在水面以上；四十八小时后，即可测定这批稻种的发芽率．

为进一步提高测定工作的质量，他们对瓶内水温进行了优选．试验的品种是水稻“二九青”和“广陆矮四号”，各用 400 粒，试验温度的范围是 22～46°C，要求四次试验得出结论．

由于 $K=4$，因此 $F_{K+1}=F_5=8$，即将试验范围八等分(图 11-9)．

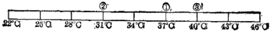


图 11-9

第一点：在 $\frac{F_4}{F_5}=\frac{5}{8}$ 处，即

$$22+(46-22)\times\frac{5}{8}=37°C,$$

第二点：$22+46-37=31°C$．

比较两次结果，两种稻种的发芽率都以 37°C 为好．去掉 22～31°C 一段．

第三点：$31+46-37=40°C$．

试验结果，发芽率都是 40°C 的较好，去掉 31～37°C 一段继续试验．

第四点：取 $37+46-40=43°C$，比较试验结果，仍以

40°C 的为好.

为了得到可靠的试验结果，消除处理条件的差异性，他们挑选试验用的热水瓶的保温温度误差在 0.5°C 左右；每个品种都重复做两次试验；并且与十天才能测定发芽率的常规试验进行对照. 对照结果表明，两个品种的发芽率都基本相符. 因此得出结论是：用快速催芽法，早籼"二九青"和"广陆矮四号"的催芽水温以 37～40°C 为最好.

4. 两点说明

(1) 好点会不会丢掉？应用 0.618 法或分数法进行优选试验，在试验过程中，要去掉一段试验范围，会不会把最好的点丢掉呢？一般说来是不会的. 我们还是拿炼钢作例子.

炼钢时，为加强钢的强度，需要加某种元素. 通常随着加进元素的含量逐步增长，钢的强度会慢慢好起来，但到一定程度后，又逐渐坏下去. 这种现象从数学角度来看，就是钢的强度与某元素的含量之间存在着函数关系. 如果用横坐标 x 表示某元素的含量，纵坐标 y 表示钢的强度，那么上述现象就可用曲线表示(图 11-10). (注意：这仅是示意图，并不反映它们之间确切的函数关系.) 整个曲线的形象就象一座山峰，我们要找的最佳点，就是曲线的最高点 $f(a)$ 所对应的元素含量 a (常称 $f(a)$ 为最大值).

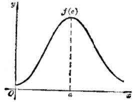


图 11-10

从图中可知，元素的含量，当从 0 逐渐增加到 a 时，钢的强度也逐渐增加，当超过 a 时，钢的强度却逐渐降低．这种现象叫做“单峰性”．在生产上，这样情况是大量存在的．

应用分数法或 0.618 法在第一点 c 试验后，依中对折得第二试验点 d. c, d 与最佳点 a 的位置关系不外乎两种：c, d 都在点 a 的同侧[图 11-11(1), (2)]，或 c, d 在 a 的两侧[图 11-11(3)]．

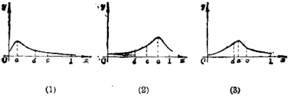


图 11-11

如图 11-11(1) 的情况，试验结果肯定是点 d 比点 c 的好，去掉的范围是 $[c, 1]$，最佳点 a 仍在试验范围内．同样，在图 11-11(2) 的情况下，试验结果肯定是点 c 优于点 d，去掉的是 $[0, d]$ 一段，最佳点也留在试验范围内．在图 11-11(3) 的情况下，c 与 d 在最佳点 a 的两侧，不论是去掉 $[0, d]$，还是去掉 $[c, 1]$，最佳点都不会丢掉．

通过上述的讨论我们可以知道，最佳点是不会丢掉的．

我们知道，用优选法进行优选，正确确定因素的试验范围是很重要的，必须根据经验或计算仔细估算．如果由于经验不足，好点不在所定的试验范围内，那么经过几次试验，必定会出现这样的趋向：在预定范围左端或右端边界上的试验结果比中间的要好，这从图 11-11 可看出来．这时我们就需要

超出预定范围再做几次试验，以便在更大范围内找到好点.

以上讲的是“单峰”的情况. “多峰”的情况怎么办？我们用前面的方法，至少可以找到一个高峰，经过实践检验，如果满足生产上的要求，那就先用上，以后再找其它高峰. 否则，就另选范围，再行优选.

(2) 0.618 是哪里来的？ 前面提到，在试验范围 AB 内取两点 x_1, x_2 进行试验，比较试验结果的好坏，沿着“坏”点剪开，去掉不包含好点的一段，我们已知道，好点是不会丢掉的. 现在的问题是怎样选取 x_1, x_2 两点，使试验次数最少. 设试验范围 AB 的长是 1, x_1 是第一个试验点，x_2 是第二个试验点. 在未知试验结果前，x_1 和 x_2 哪个好是不知道的. 因此去掉 $[0, x_2]$ 和去掉 $[x_1, 1]$ 都是可能的. 这就要求它们一样长：

$$x_2 = 1 - x_1, \tag{1}$$

即 x_2 应该是 x_1 关于中点的对称点(图 11-12). 而且无论经

图 11-12

过几次取舍，所保留的一点(即包含在新范围的已试点)始终应在新范围中的相应位置上. 这就是说，如果去掉的是 $[x_1, 1]$，留下 $[0, x_1]$，那么其中已做过试验的点 x_2 在 $[0, x_1]$ 中的位置，和 x_1 在 $[0, 1]$ 中的位置应该相仿，也就是它们的比相同：

$$x_1 : 1 = x_2 : x_1,$$

即

$$x_1^2 = x_2. \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式，得方程

$$x_1^2+x_1-1=0.$$

这是一个一元二次方程，我们可以求得它的解是

$$x_1=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

这里负数对于我们所讨论的问题没有实际意义，所以取

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

这是一个无理数，用无限小数表示，就是

$$x_1=0.6180339887\cdots.$$

我们用的 0.618 就是 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 的近似值.

由此可见，只要第一试验点 x_1 取在 0.618 处，下一试验点取 x_1 关于中点的对称点，就能保证无论经过几次取舍，新范围内所包含的已试点始终在新范围的 0.618 处．这样就能以较少的试验求得好点.

知道了 0.618 的由来，我们也就可以进一步认识分数法与 0.618 的关系了.

把上面分数法中(2)式中的每个分数表示成小数，就是

$$\frac{2}{3}\approx0.6,\ \frac{3}{5}=0.60,\ \frac{5}{8}=0.625,\ \frac{8}{13}\approx0.615,$$

$$\frac{13}{21}\approx0.619,\ \frac{21}{34}\approx0.618,\ \cdots.$$

可以看出，(2)式中的分数 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 是分母不超过 F_{n+1} 的分数中与 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 最接近的一个．严格的证明这里从略．因此分数法就是用这些分数代替 0.618 的办法．分数法的优点是在限定试验次数的条件下，能较快地找到最佳点，而且计算较方便．但应用不如 0.618 法广，精度也稍差些.

二、双因素问题的优选方法

“世界上的事情是复杂的，是由各方面的因素决定的。”在生产实际中，需要决定的因素往往不止一个．仍以炼特种钢为例，除了考虑特种元素的合适加入量外，还得考虑合适的温度，这就是两个因素的优选问题．下面我们介绍双因素问题的优选方法．

1．纵横对折法 在炼某种特种钢时，设特种元素含量的选择范围在1000～2000克之间，冶炼温度的选择范围在1000～2000°C之间．

取一张矩形纸表示试验范围，水平边表示元素的加入量，与水平垂直的边表示温度（图 11-13）．

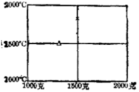


图 11-13

第一步，先把纸纵向对折，即固定温度在1500°C．然后用单因素法对元素加入量进行优选，得到当冶炼温度为1500°C时的合适加入量在“△”处．第二步，把纸横向对折，即固定元素加入量为1500克，仍用单因素优选法对温度进行优选，找出较好点在“＊”处．第三步，比较“＊”处与“△”处的好坏，如果“＊”的好，那么沿着“△”点所在的那条线裁开，留下较好点“＊”所在的上半张（如果是“△”处好，那么裁掉右半张，留下左半张）．在留下的矩形纸上，按上述同样的步

骤，继续做下去，直到找到生产上满意的点为止.

【例 4】 某调味品中的一种原料，生产工序多，条件复杂. 工人师傅遵照毛主席关于“要用全力找出它的主要矛盾”的教导，对其中一道关键性的工序——水解，作汽压和时间双因素优选.

优选范围是：蒸汽压 2～3 公斤/厘米²；时间 35～55 分钟. 应用对折法进行.

(1) 固定时间为 45 分钟，用单因素 0.618 法对蒸汽压进行了三次试验(图 11-14). 试验结果表明，第 3 次试验效果较好.

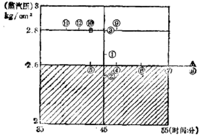


图 11-14

(2) 固定蒸汽压为 2.5 公斤/厘米²，对时间进行了五次试验(由于时间越长，效果越好，所以增做了第 7，第 8 次试验). 试验结果表明，以第 8 次为好.

(3) 比较第 3 和第 8 次试验结果，前一点比后一点好，所以去掉蒸汽压 2～2.5 公斤/厘米² 一段，在留下的范围内继续优选.

(4) 固定蒸汽压为 2.8 公斤/厘米²，对时间进行了四次优选. 试验结果表明，以第 10 次为最好. 如果试验到此为止，

那么最佳水解条件是蒸汽压2.8公斤/厘米²，时间为43分钟．

2. 从好点出发法　仍以前述炼特种钢的元素加入量和温度为例．第一步，把温度固定在1618°C，即温度范围内的0.618处，然后用单因素法对特种元素加入量进行优选，找出较好点"*"克(图11-15)．第二步，把元素加入量固定在较好点"*"克处，对温度进行优选，得较好点"△"度．然后再把温度固定在较好点"△"度处，对元素加入量再优选，得"□"克为好．如此继续，直到满意为止．这里从第四次开始，可以缩小试验范围．如图11-16所示，我们可以比较"*"与"△"的好坏，如果"△"的好，那么可把1618°C以上的范围去掉．又比较"△"与"□"的好坏，如果"□"比"△"的好，那么可把"△"所在竖线的右边部分去掉．于是，试验范围缩小了许多．图11-16所示的阴影部分即为去掉的部分．

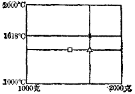


图 11-15

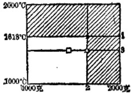


图 11-16

【例5】　毛巾印花后需经高温固色．某针织厂工人在改革印花工艺过程中，为掌握烘焙的温度和时间，用"从好点出发法"进行了十次试验，找到了较合适的固色条件．

试验范围是：时间15～45分，温度100～140°C．具体步骤如下：

(1) 先固定温度为125°C(即温度试验范围的5/8处)，按0.618法选择时间，经三次试验表明(图11-17)，当烘焙时

间为38分时，已比原来生产所用的时间45分钟好，暂定38分为较好点.

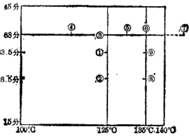


图 11-17

(2) 固定时间为38分，将温度分为八等分.用分数法优选温度.

第6次与第7次试验的效果相近，因此确定135°C为较好点.

(3) 固定温度135°C，对时间再优选，希望生产时间尽可能短. 试验结果是：26.5分与33.5分都符合质量要求.

最后，正式采用135°C和30分钟的条件进行生产. 实践证明，所生产的产品，颜色鲜艳美观，深受工农兵欢迎.

3. *平行线法* 如果两个因素中，有一个不易调整，那么可用平行线法. 例如上述炼钢的例子，如果元素的加入量容易掌握而温度难调，那么我们可将温度先固定在1618°C(全长的0.618)处，用单因素优选法对元素加入量进行优选，得较好点在“*”处(图11-18)，然后再将温度固定在1382°C(全长的0.382)处，又对元素加入量进行优选，得较好点在“△”处. 比较“*”与“△”处的好坏，如果“*”比“△”好，那么

把 1000～1382℃的范围去掉．在剩下的范围内，按依中对折的原则，做下去，直到生产上满意为止．

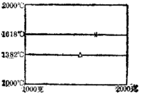


图 11-18

由上述可以看出，处理双因素的基本方法是化双因素为单因素，用单因素法进行优选．两个因素交叉进行，比较结果留下较好点，去掉坏点部分．这样往复，一次比一次更接近好点．

4．多因素问题　如果遇到两个以上因素的优选问题怎么办？毛主席教导我们：“**任何过程如果有多数矛盾存在的话，其中必定有一种是主要的，起着领导的、决定的作用，其他则处于次要和服从的地位。**”因此，在解决多因素问题时我们首先要找出问题中最主要的因素，把多因素问题化为双因素或单因素的问题来处理．

要抓主要矛盾，就要在党的领导下，依靠有实践经验的工人和贫下中农，调查研究，揭露矛盾，分析矛盾，确定试验项目．主要矛盾抓准了，优选法才能充分发挥作用．再通过大量的实践，达到解决矛盾的目的．因此，毛主席的群众路线，抓主要矛盾等光辉思想，是我们应用优选法的指路明灯．

例如，某厂生产农业上急需的磷肥，过去原料要依靠进口．通过无产阶级文化大革命，工人们决定采用国产原料进行生产．他们遵照毛主席关于“**着重于捉住主要的矛盾**”的教

导，分析了影响磷肥质量的各种因素和互相之间的关系，认为因素虽多，但温度与浓度是最为主要的因素．抓住了主要矛盾，它们用双因素优选法做了四次试验，就得到了较为理想的方案，不仅提高了产量和质量，而且降低了原料消耗，达到了优质、高产、低消耗的目的．

三、特殊情况下的优选方法

1．对分法 “不同质的矛盾，只有用不同质的方法才能解决。”我们介绍的单因素 0.618 法和分数法，都是在比较两次试验结果以后，才能决定试验范围的哪一部分可以去掉，哪一部分应该保留．但在实践中，还会遇到这样一种情况：从一次试验结果，就可以判断出该试验点的取值是偏高了或偏低了．这种情况下用对分法安排试验，更为合适．

对分法，就是把第一个试验点取在预定试验范围的中点，该点试验结果如果说明取值过高了，就把比该点更高的部分去掉．如果该点取值过低了，就把比该点更低的部分去掉．然后取留下范围的中点继续试验．如此继续，直到满意为止．

例如，某产品需用一种贵重金属，过去含量为 16％，为降低成本，是否可以不降低产品质量而减少贵重金属的含量呢？因为产品质量是有一定标准的，所以每试验一次，就可判断取值是高了还是低了．因此可用对分法．先试中点，即含量 8％．如合格，那么去掉比 8％ 高的一半．再试中点 4％，如不合格，就去掉比 4％ 低的一半．再试中点 6％．如又合

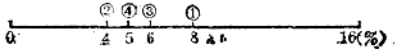


图 11-19

格，就再试 4% 到 6% 的中点 5%（图 11-19）．如仍合格，那么可以用 5% 进行生产．

用对分法能优选的问题，虽然也可以用 0.618 法或分数法进行优选，但是由于对分法每次去掉一半，所以试验次数就比 0.618 法或分数法更少，而且取点方便．但事物总是一分为二的．应用对分法必须先有一个“标准”．对每次试验的结果，用“标准”来判别它的好坏，以便选取下一个试验点．因此，对分法的应用范围有很大的局限性．

2．爬山法（逐步提高法） 在生产斗争和科学实验中，某些被优选的因素不允许作大幅度的调整，或原有生产条件已经比较好，但还需要寻找更好的条件．在这种情况下，可以采用爬山法．

爬山法就是从某一点出发，前、后、左、右试探，那里好就向那个方向试验下去，这样一步一步前进，直到找到好点为止．所以爬山法也叫逐步提高法，也有叫做瞎子爬山法的．

(1) 单因素．我们举例说明如下：

生产豆腐，豆浆的浓度对豆腐的质量影响很大．某豆制品厂过去生产豆腐都是凭经验，质量不稳定．工人老师傅用单因素爬山法对豆浆浓度进行了优选．

经测定，原有豆浆浓度为 15 个单位．以此为出发点，先向增大浓度方向试探．试验结果做出的豆腐质量都不好．于是向减少浓度方向试探．试验结果，豆浆浓度为 14 个单位比原有条件做出的豆腐质量好．再减少浓度，效果都没有 14 个单位的好．于是确定以 14 个单位浓度的豆浆生产豆腐．此后，他们又分别对其他因素进行优选．最后得到了生产豆腐的各项最佳技术指标，既节约了原料，又提高了豆腐质量，深受消费者的欢迎．

(2) 双因素．设两个因素 x, y，允许调动的幅度是一个单位．我们借助于坐标法，说明双因素爬山法的方法．

如图 11-20 所示．$A_0(x_0, y_0)$ 是试验的出发点（通常总是把原有的生产条件作为出发点）．先向上爬一步，即在 $A_1(x_0, y_0+1)$ 处试，如果 A_1 比 A_0 的好，那么就取 A_1 为新的出发点．如果 A_1 比 A_0 坏，那么在 A_0 的右面，左面，下面（即在 A_2, A_3, A_4 处）都试试．哪一个比 A_0 好，就作为新的出发点．如此继续，不断提高，直到满意为止．如果四面都不好，当然 A_0 便是最高峰了．整个过程如图 11-21 所示．

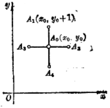


图 11-20

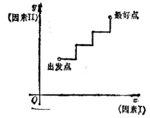


图 11-21

小　　结

1. 优选法就是利用数学原理，合理安排试验点，减少试验的盲目性，以求又准又快地找到最佳值的一种试验方法．

2. 单因素：

(1) 0.618 法：先按公式"第一点＝左端点＋(右端点－左端点)×0.618"取第一试验点，再按公式"后一点＝左端点＋右端点－前一点"取第二试验点，然后比较这二次试验结果的"好"，"坏"，去"坏"留"好"，在留下的范围内按依中对折的原则，继续试验，直到符合要求为止．

(2) 分数法：当预定试验次数为 K 时，根据第 194 页表上所示，将试验范围 F_{K+1} 等分，第一点取在 $\frac{F_K}{F_{K+1}}$ 处，以后按依中对折原则做下去．K 次试验后，就得到试验范围内 $F_{K+1}-1$ 个等分点中的最好点．

3．双因素的三种方法——对折法，从好点出发法，平行线法的基本原则都是：

先固定某一因素，降双因素为单因素，优选得较好点；再固定另一因素，对前一因素用单因素法优选，得另一较好点（不同之处在于固定地方的取法不同）．然后比较这两个点的"好"，"坏"，去掉坏点所在部分，留下好点所在部分．如此继续进行，直到满意为止．

4．特殊情况下的优选方法．

(1) 对分法：如果所优选的问题存在一个"标准"，每试验一次就可以与"标准"相比较，分出"好"、"坏"，那么可采用对分法．对分法每次都取试验范围的中点为试验点．如果试验结果表明该点取值高了，就把比该点更高的部分去掉；反之也一样．如此继续，直到符合要求为止．

(2) 爬山法（逐步提高法）：在因素不宜大幅度调整的情况下，可采用爬山法．它的方法是：从某一已知点出发，逐步摸索前进，直到符合生产要求为止．

第二节　统筹方法

毛主席教导我们："鼓足干劲，力争上游，多快好省地建设社会主义。"在三大革命实践中，常常会碰到如何统筹全局，抓住关键，合理安排，多、快、好、省地完成任务的生产实际问题．

例如，造一间房子，有打地基，砌墙脚，做门档、窗档，砌墙，盖屋顶等工序．如果砌好墙脚后，再做门档、窗档，然后再砌墙，就会发生窝工现象．因此，一般总是在打地基和砌墙脚的同时，把门档、窗档做好，等到砌好墙脚，放上门档、窗档

就可以砌墙．又如在农村的夏收夏种中，广大贫下中农总是一面收割麦子，一面翻地插秧，交错地进行．如果等到所有麦子收割完毕后，再翻地插秧，就会延误农时，影响下季收成．一个较大的工程，工序很多，彼此之间互相关联，就更需要统筹全局，作出科学的安排，才能多、快、好、省地完成任务．

统筹方法就是一种帮助我们作出科学安排的数学方法．在毛主席的革命路线指引下，它能在我们的社会主义建设中发挥一定的作用．

一、主要矛盾线和工序流线图

“一切结论产生于调查情况的末尾，而不是在它的先头。”统筹方法的第一步工作，就是要对某项工程（任务）的全过程进行调查与分析．调查的内容可包括：列举本工程的所有工序；工序与工序之间的衔接关系；每个工序所需的时间、人工等．例如，某生产队要建造一座仓库，它的全部工序是：(1) 平整场地，(2) 挖土，(3) 运沙石水泥，(4) 浇混凝土，(5) 养护，(6) 做门档、窗档，(7) 运石灰与砖头，(8) 砌墙，(9) 准备屋面材料，(10) 盖屋顶．每个工序用一支箭头表示，如 $\xrightarrow{\text{平整土地}}$，$\xrightarrow{\text{挖土}}$，$\xrightarrow{\text{盖屋顶}}$ 等．这些工序之间的先后衔接关系，由表示它们的箭头的衔接关系来表达．例如：平整场地后，一面挖土，一面运沙石水泥，再浇混凝土，然后养护，在养护的同时，做好门档、窗档，运石灰与砖头，于是开始砌墙，在砌墙完工以前要求准备好屋面材料，等到墙砌好，就盖屋顶．这样的先后关系，以及每道工序所需的时间（天数），我们用如下的箭头衔接关系来表达（图 11-22）：

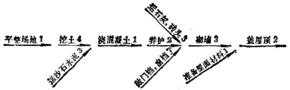


图 11-22

为了说明和计算的方便，在箭头箭尾处都标上号码．这样每道工序就可以用两个数字来表示，如图 11-23 中，①→②就代表“平整场地”工序，③→④ 代表“运沙石水泥”工序，⑩→⑪ 代表“盖屋顶”工序，等等．

图 11-24 中，反映了一个有十二道工序的工程的全过程．

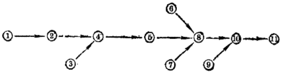


图 11-23

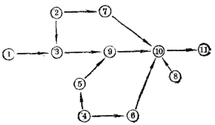


图 11-24

从图上可以看出：工序 ③→⑨ 须待工序 ①→③ 与工序 ②→③ 完工后，才能开工；而工序 ①→③，②→③，②→⑦，④→⑤，④→⑥，⑧→⑩ 的前面没有工序，因此，它们的开工日期不受前道工序的限制；而工序 ⑩→⑪，则要等到前面十一道工序都完工后才能开工，它是本工程的最后一道工序.

我们来看图 11-25 所示的工程．该箭头图上有一个起点

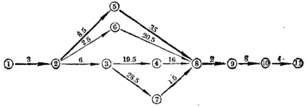


图 11-25

和一个终点．从起点沿着箭头前进方向直止终点，共有四条线路．计算每一条线路的时间(图上所标为小时数)．线路

$$①\xrightarrow{3}②\xrightarrow{8.5}⑤\xrightarrow{35}⑧\xrightarrow{2}⑨\xrightarrow{8}⑩\xrightarrow{4}⑪$$

共需时间 3+8.5+35+2+8+4=60.5 小时；线路

$$①\xrightarrow{3}②\xrightarrow{2.5}⑥\xrightarrow{20.5}⑧\xrightarrow{2}⑨\xrightarrow{8}⑩\xrightarrow{4}⑪$$

共需时间 3+2.5+20.5+2+8+4=40 小时；线路

$$①\xrightarrow{3}②\xrightarrow{6}③\xrightarrow{19.5}④\xrightarrow{16}⑧\xrightarrow{2}⑨\xrightarrow{8}⑩\xrightarrow{4}⑪$$

共需时间 3+6+19.5+16+2+8+4=58.5 小时；线路

$$①\xrightarrow{3}②\xrightarrow{6}③\xrightarrow{28.5}⑦\xrightarrow{1.5}⑧\xrightarrow{2}⑨\xrightarrow{8}⑩\xrightarrow{4}⑪$$

共需时间 3+6+28.5+1.5+2+8+4=53 小时.

时间最长的线路决定整个工程的工期．在这里，第一条线路所需的时间最长，即 7 天半(每天以 8 小时计算)．如果在这条线路上采取措施，提早一天完工，那么整个工程就可能提早一天完成．因此，这条线路成为整个工程的关键，我们把它叫做主要矛盾线，在图中常用红线或粗线表示．注上时间，算出并标明了主要矛盾线的箭头图，我们把它叫做工序流线图．读者试找出如图 11-26 所示工程的主要矛盾线，并计算它的工期(图上所标为天数)．

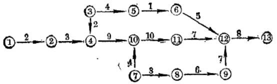


图 11-26

通过计算可以知道，该工程的五条线路中，线路

①$\xrightarrow{2}$②$\xrightarrow{3}$④$\xrightarrow{9}$⑩$\xrightarrow{10}$⑪$\xrightarrow{7}$⑫$\xrightarrow{8}$⑬

所需的时间最长，它是本工程的主要矛盾线，工期是 40 天．

二、计 算 时 差

非主要矛盾线上的总工时，比主要矛盾线上的工时少，这说明，它可以允许某些工序适当延迟开工．例如图 11-26 所示工程的工序 ③→④，可以迟三天开工，或少放些人力、物力，而适当延长工时，以支援主要矛盾线．这个潜力究竟有多大？能否有个数量表示？胸中有"数"。这是说，对情况和

问题一定要注意到它们的数量方面，要有基本的数量的分析。在这里，计算时差就是提供一个数量分析的办法．所谓时差，就是指最迟必须开工时间与最早可能开工时间之差．我们以图 11-26 所示的工程为例，说明怎样来计算时差．

每一道工序必须等它前面的所有工序完成之后，才能开工．因此有一个最早可能开工时间，我们用 $T_{早}$ 表示．例如①→②，③→④ 前面没有工序，所以 $T_{早}=0$．我们用记号 $\boxed{0}$ 标在该箭头下面．工序 ②→④ 必须在工序 ①→② 完工之后，才能开工（以后我们就把紧接在某工序前（后）面的工序，叫做该工序的紧前（后）工序，这里工序 ①→② 就是 ②→④ 的紧前工序，而 ②→④ 就是 ①→② 的紧后工序），它的 $T_{早}$ 是 2 天以后．又如，工序 ④→⑩，必须在 ②→④ 与 ③→④ 两个工序都完工之后，才能开工，显然它的 $T_{早}$ 是 5 天以后．

一般说来，每道工序的最早可能开工时间的计算公式是：

$$T_{早}=\text{紧前工序的 } T_{早}+\text{紧前工序所需时间}.$$

如果某工序有两道以上紧前工序的话，那么要按所有紧前工序中的最大数计算．

计算各道工序的 $T_{早}$ 总是从起点开始，顺着箭头方向，依次进行．如 ②→④ 前面的紧前工序上有一道 ①→②，它的 $T_{早}=0+2=2$ 天．工序 ⑩→⑪ 的紧前工序有两道：④→⑩ 和 ⑦→⑩．

（工序 ④→⑩ 的 $T_{早}$）+（④→⑩ 所需时间）$=5+9=14$ 天；而

（工序 ⑦→⑩ 的 $T_{早}$）+（⑦→⑩ 所需时间）$=0+4=4$ 天．

所以工序 ⑩→⑪ 的最早可能开工时间是 14 天以后．其他各工序的 $T_{早}$ 不一一计算，结果如图 11-27 所示．

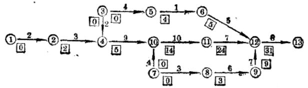


图 11-27

知道了每个工序的最早可能开工时间，就可以提前做好开工准备工作，真正做到“不打无准备之仗”.

如何计算最迟必须开工时间呢？主要矛盾线上的总工时，决定着整个工程的完工日期．一道工序，如果某个时刻还不开工就要影响总工程的如期完成，这个时刻就是最迟必须开工时间，我们用 $T_{迟}$ 表示．在上例中，因为整个工程要39天完成，最后一道工序 ⑫→⑬ 需8天完成，所以工序 ⑫→⑬ 的 $T_{迟}$ 是 $39-8=31$ 天后的第一天，即第32天再不开工，就会影响整个工程的完成．我们用 △ 标在工序流线图中的该箭头下面．那么工序 ⑨→⑫ 的 $T_{迟}$ 如何计算呢？它本身所需的时间是7天，而紧后工序 ⑫→⑬ 的 $T_{迟}$ 是31天，显然这两数之差，$31-7=24$ 天即为工序 ⑨→⑫ 的 $T_{迟}$.

一般说来，$T_{迟}$ 的计算公式如下：

$$T_{迟}=\text{紧后工序的 }T_{迟}-\text{本工序所需时间}.$$

因此各工序 $T_{迟}$ 的计算，我们总是从终点开始，逆箭头前进方向依次计算，直到各个起点．它和 $T_{早}$ 计算的顺序正好相反．

按照上述计算公式和计算次序，图 11-26 所示工程的各工序的 $T_{迟}$ 计算结果如图 11-28 所示.

我们把每个工序的最迟开工时间与最早开工时间之差，叫做时差．例如 ⑧→⑨ 的时差是 $18-3=15$.

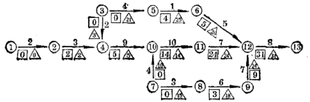


图 11-28

从上述计算可看出，主要矛盾线上各工序的时差都是零；而时差不为零的工序，时差越大，说明潜力越大。如工序③→⑤的时差为21，它可以延迟21天后才开工，在21天以前把人力、物力去支援主要矛盾线，以缩短总工期。

通过时差计算，我们只要把时差为零的所有工序连起来，就得到了主要矛盾线。这也为我们提供了寻找主要矛盾线的较为简便的方法。

对于较复杂的工程，计算时差可以利用表格进行，以免漏算、出错。如上述工程的计算，可以列表如下：

开工时间计算表

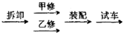
工序编号		本工序时间	开工时间		时差
箭尾号	箭头号		$T_{早}$	$T_{迟}$	$T_{迟}-T_{早}$
1	2	2	0	0	0
2	4	3	2	2	0
4	10	9	5	5	0
10	11	10	14	14	0
11	12	7	24	24	0
12	13	8	31	31	0
3	4	2	0	3	3
3	5	4	0	21	21
5	6	1	4	25	21
6	12	5	5	26	21
7	10	4	0	10	10
7	8	3	0	15	15
8	9	6	3	18	15
9	12	7	9	24	15

三、平行作业和交错作业——零箭头的应用

画出了工序流线图后，我们就可以对主要矛盾线上的工序采取一些措施，以达到缩短工期的目的．下面我们以平行作业和交错作业，来说明零箭头的应用．

1．平行作业　平行作业就是把一道工序拆成几道同时平行进行，以缩短工期．例如挖沟，可以两头同时挖；又如修理机器，有的机器拆开后可以分两部分同时修理，修完了，再装配试车．

在工序流线图上，要反映平行作业的情况，需要用到零箭头．例如上面所说的修理机器，共有五道工序：



在"拆"、"装"之间的修理是分成两个任务同时进行，如果我们画成

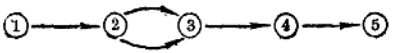


图 11-29

那么 ②→③ 将同时代表两个任务了．这显然没有确切反映工序间的关系．这时可以运用零箭头．

零箭头就是用 $\overset{0}{\rightarrow}$ 表示虚设任务，所需的时间为零．上面的箭头图可以画成如图 11-30 所示．

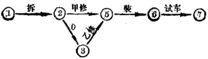


图 11-30

这样，从图上可以清楚地看出，在“拆”与“装”之间有两个任务：②→⑤ 与 ③→⑤，分别表示甲修、乙修．上面的图也可以画成如图 11-31 所示．

图 11-31

又如，图 11-32 中的 ⑩→⑭ 工序，改为平行作业，分成三个任务同时做，就可画成如图 11-33 那样．

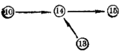


图 11-32

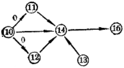


图 11-33

2．交错作业　交错作业就是相连的几道工序交错地进行．例如插秧季节，贫下中农为了不误农时，争分夺秒抢时间，把插秧的四道工序：耙田、耖田、划滴田、插秧交错进行．他们把原来的四道工序：

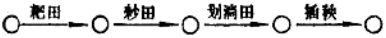


图 11-34

分为两段交错作业．我们可以画成如图 11-35 所示：

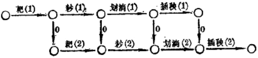


图 11-35

如果分三段交错作业，是否能画成如图 11-36 所示的流线图呢？

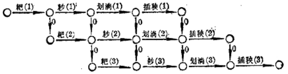


图 11-36

严格地说，这样画是有问题的．因为从图中看，$\xrightarrow{\text{耙 (3)}}$ 在 $\xrightarrow{\text{耖 (1)}}$ 之后再进行，$\xrightarrow{\text{耖 (3)}}$ 在 $\xrightarrow{\text{划淌 (1)}}$ 之后进行，……事实上不一定这样，所以正确的画法应当是如图 11-37 所示．

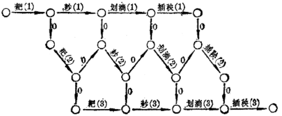


图 11-37

通过平行作业与交错作业的画法，可以看出，运用零箭头对于我们确切表示工序间的顺序关系是很重要的．否则，在计算时间、人力等方面，容易产生误差．

四、人力安排和工程进程——横道图

抓住了主要矛盾线，有了工序流线图，挖掘了各个工序的潜力，就可以对人力作出适当的安排，从而作出工程进度表．

某工程的工序流线图和时差计算结果如图 11-38 所示．

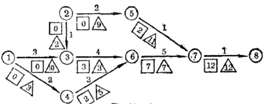


图 11-38

我们以该图为例，说明如何作出人力、时间的统筹安排.

如果每道工序所需的人力数如下表所示：

工　序	1～3	3～6	6～7	7～8	1～4	4～6	2～3	2～5	5～7
所需人数	5	6	4	8	2	3	4	4	4
时　差	0	0	0	0	3	3	2	9	9

如果每道工序都以 $T_{早}$ 的时间开工，那么每天所需人力数和进度就可以用下列横道图(也叫条形图)来表示：

工　序	所需人数	时间 (天) 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1～3	5	■	■	■										
3～6	6				■	■	■	■						
6～7	4								■	■	■	■	■	
7～8	8													■
1～4	2	■	■											
4～6	3			■	■									
2～3	4	■												
2～5	4	■	■											
5～7	4			■										
所需劳力数总计		15	11	12	9	6	6	6	4	4	4	4	4	8

人数常常是有限的．假使可供安排的劳力只有 9 人，那么，从表上看出，第一、二、三叁天所需的人数已超出了客观可能．这就需要充分挖掘潜力，以保证在现有劳力的条件下，争取如期完成任务．前面说过，时差最大的工序潜力最大，我们就把时差大的工序尽量往后延．例如，把工序 ②→⑤，⑤→⑦ 往后移，照 $T_{迟}$ 的时间开工，就可以把第一、二两天的人数减少到 11，7 人，再把工序 ①→④，④→⑥ 推迟到 $T_{迟}$ 时间开工，就解决了劳力不足的困难．

经过调整以后的人力、时间安排如下：

工　序	所需人数	时				间				(天)				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1～3	5	▬	▬	▬										
3～6	6				▬	▬	▬	▬						
6～7	4								▬	▬	▬	▬	▬	
7～8	8													▬
1～4	2				▬	▬								
4～6	3						▬	▬						
2～3	4	▬												
2～5	4										▬	▬		
5～7	4												▬	
所需劳力数总计		9	5	5	8	8	9	9	4	4	8	8	8	8

用上述"时差大的工序往后延"的原则，一般只能得出较好的安排，而不能保证得到最好的安排．读者可以看出，第八、九两天每天所需劳力仅 4 人，如果工作允许 8 人同时进行

的话，那么一天就可完成任务，整个工期又可缩短一天.

在实际工作中，各项任务需要不同工种的劳力，例如在工业生产中，有水、电、泥水等工种；在农业生产中也有轻重劳力的不同，我们可用上面的方法，分别作出横道图.

【例】 祖国江南农村，每年早稻插秧与夏收夏种季节，农活集中，时间紧．某生产队的贫下中农，根据实践经验，于1974年应用统筹方法，仅用了八天半时间就完成了121亩绿肥田的插秧任务.

下面是该生产队作的插秧工序流线图*(图 11-39) 和横道图.

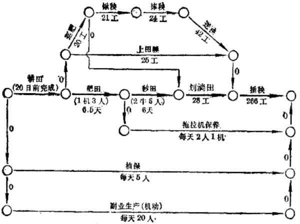


图 11-39

为了缩短工期，对主要矛盾线上的几道工序采取了交错

* 该生产队采用小苗育秧，锹秧、捧秧就是从场地上起秧。

作业．劳动力安排如下：

劳动力统筹安排图（计划）

任务 \ 人数 \ 日期	21日前	21	22	23	24	25	26	27	28
划滴田		4	4	4	4	4	4	4	4
上田塍		19 15	2	2	2	2			
插秧（锹、捧、送）			45	45	45	45	52 53	58	58 62
运施肥		20							
其他		12							
植保		5	5	5	5	5			
耖田		5 2牛	5 2牛	5 2牛	5 2牛	5 2牛	5 2牛		
耙田		3 1机	3 1机	3 1机	3 1机	3 1机	3 1机		
机保							2 1机	2 1机	2 1机
出勤人数		64	64	64	64	64	64	64	64

注：(1) 21日前，田已全部耕好，并耙过一部分．
(2) 粗线条上的数目表示人数，虚线表示人力转移．
(3) 在插秧人数中，有3人锹秧，3人捧秧，6人运秧．
(4) 副业生产20人不在内．

在进行过程中，有一天下雨，给运秧、插秧工作带来困难，进度慢了下来．生产队长根据这个情况，增加了运秧、插秧的人力，从而保证了插秧任务的如期完成．劳力的实际安排如下：

劳力实际安排图

任务 \ 人数 \ 日期	21日前	21	22	23	24	25	26	27	28	29
划滴田		4	4	4	4	4	4	2	2	
上田埂		18	1	1	1	1	1	1		
插秧（锹、摔、送）			45	50	45	55	58	60	61 63	16
运施肥		16								
其他		12								
植保		5	5	5	5					
耖田		5	5	5	2	2	2	2		
耙田		3	3	3	3	3	2			
机保								2	2	
出勤人数		63	63	68	60	65	67 65	67	65	16

注：(1) 比计划多的劳力是从副业队抽来的.
(2) 29日上午是秧田插秧.

上面所介绍的，每一任务完成的时间都是肯定的．但不少问题是完成时间不能肯定的．对这类非肯定型的问题，可以化为肯定型来处理．我们先估计出三个时间，即：最乐观的估计，就是最快多少时间能完成；最保守的估计，也就是最慢什么时间能完成；最可能什么时间可以完成．然后把最乐观的估计加上最保守的估计，再加上最可能的估计的4倍，除以6．得到平均数．然后按照肯定型的方法来处理．例如完成下面的任务，最少6天，最可能7天．最多14天，可画作

$$① \xrightarrow{6-7-14} ②$$

我们根据上面所说的方法，以

$$\frac{1}{6}(6+4\times7+14)=8$$

作为平均数，然后根据肯定型的方法进行．这个求平均数的公式，我们可以作为经验公式来应用．但必须注意，用这样估算得出来的总的完成日期，只是一个可能完成日期，确切地说，这个期限内完成的可能性是50%.

“群众中蕴藏了一种极大的社会主义的积极性。”应用统筹方法，不论是对工序、时间和人力的确定，还是对计划的执行，都必须牢记党的群众路线，紧紧依靠广大群众。**“一般地说来，不论在变革自然或变革社会的实践中，人们原定的思想、理论、计划、方案，毫无改变地实现出来的事，是很少的。”**群众发挥了冲天干劲，开展了技术革新，就有可能改变原订计划，甚至使主要矛盾线转化为次要矛盾线．因此，必须随时注意新情况的出现，及时修订计划，务使工程能多快好省地进行．

在具体工作中应用各种数学方法，可以使我们胸中有数，从而取得比较好的效果．但我们必须牢记毛主席关于**“路线是个纲，纲举目张”**的教导．建设社会主义，主要依靠广大群众执行毛主席的革命路线．我们只有认真学习无产阶级专政的理论，提高执行毛主席革命路线的自觉性，才能使一切工作不断取得胜利．

小　结

1．统筹方法是一种为生产建设服务的数学方法，我们必须紧紧依靠群众，在调查研究的基础上，根据某一工程的所有工序，画出箭头图，注上时间，标明主要矛盾线（所需时间最长的线路）．注意零箭头的应用．这样的箭头图叫做工序流线图．

2．所有工序都有一个最早可能开工时间和最迟必须开工时间．

它们的计算公式是：

$T_{早}$＝紧前工序的 $T_{早}$＋紧前工序所需时间，

$T_{迟}$＝紧后工序的 $T_{迟}$－本工序所需时间.

3．最迟开工时间与最早开工时间之差叫做时差．时差越大的工序说明潜力越大．主要矛盾线上的工序，时差都为零.

4．根据工序流线图，可以作出劳力与工程进度的安排，这种安排通常用横道图来表示。

第十二章　数理统计方法简介

伟大领袖毛主席教导我们："对情况和问题一定要注意到它们的数量方面，要有基本的数量的分析。"我们从事一切工作，都要胸中有"数"，这就需要我们深入实际，向有实践经验的工农兵学习，收集能表示事物性质的各种数据，并对它们作出分析，得出结论．譬如通过实践、总结，我们知道，某早稻品种一般每穗是55～65粒，千粒重是25克左右，出米率是72～73%，全生育期是115～120天等等．这样，我们就比较深刻地认识了这个品种，并能主动地去改造它．

数理统计方法就是在劳动人民长期实践的基础上，总结和发展起来的一类数量分析的方法．在这一章里，我们将简单地介绍几种在工农业生产中常用的数理统计方法．

第一节　平均数、误差、平均偏差平方和

一、平　均　数

平均数在三大革命实践中的应用很广．例如，生产队的平均亩产量反映了生产队的生产水平，大队的平均亩产量反映了全大队的生产水平；"九二〇"农药的浓度就是平均每毫升中所含的有效单位数；某一地区的气候干湿程度，只要看那里的年平均降水量的记录就可有所了解，等等．

一般说来，经过调查研究，得到一批数据 $y_1, y_2, \cdots, y_n$

共 n 个，那么它的平均数就是

$$\bar{y}=\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$

如果我们把

$$y_1+y_2+\cdots+y_n$$

记作 $\sum_{i=1}^{n} y_i$，这里符号 Σ（希腊字母，读作西格马）表示求和的意思，$\sum_{i=1}^{n} y_i$ 读作 $\Sigma—y—i$，i 由 1 到 n，表示从 y_1 加到 y_n 的和，那么

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

二、误　差

平均数的另一用处是同误差联系在一起的．什么是误差呢？我们举一个例子来说明．

某公社有 11 块油菜试验田，面积都是一亩，土地条件基本相同，种的是同一品种，它们的亩产量如表 1．

表 1

田块号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
亩产量	322	307	327	341	359	321	320	304	335	265	319

从表上可看出，每块田的亩产量并不相同，但相差也不太大．如果按田块号的次序把 11 个亩产量点在一个直角坐标系上（如图 12-1），便可看到，这些产量不但高低不一，并且它们之间的差异也是不规则的．如果我们在另外 11 块试验田上重复这一试验，不论采取什么样的措施，使生产条件尽可能相同，结果产量总不能完全一样，而是有差异的．引起差异的

原因很多，诸如种子间的差异，田块土质、肥力和位置的差异，

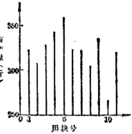


图 12-1

栽培管理的差异，以及自然条件如气温、日照、风、雨、病、虫的差异等等．各田块产量的差异就是这一切差异的影响．一般说，任何科学试验的观测结果总是有差异的．

在长期的生产实践中，人们认识到，虽然影响产量的因素很多，但各种因素对产量影响的大小并不都是一样的．如果从这些因素中挑出一些主要的因素加以控制，使它们固定不变，那么，从理论上来讲，这些因素对产量的影响也是固定不变的，我们把这固定值叫做产量的真值．

而其他一些次要的因素就听凭它们随机变化，不加控制(有些因素，如气温、日照等也无法控制)，因而它们对产量的影响也是随机变化的，是一个变量，我们把这个变量叫做误差．这样看来，一个产量可以看成是一个固定的真值加上一个变化的误差．任何科学试验的观测结果都可以这样分析，即

$$观察值=真值+误差$$

观察值所以有差异就是因为有误差的缘故．

实践证明，误差是有规律的，掌握了误差的规律，真值就可以估计出来了．

误差的规律是：

(1) 误差值可以为零(零误差)，可以小于零(负误差)，也可以大于零(正误差)；

(2) 绝对值小的误差较绝对值大的误差更容易出现；

(3) 绝对值相同的正误差与负误差，出现的可能性相等；

(4) 观察值的个数越多，误差值的代数和越接近于零.

根据误差的规律，很容易得到下面这一事实：

一个量的真值可以用它的 n 个观察值的平均值来近似表达，并且 n 越大，近似程度越好.

因为根据上述误差的几个特点，如果把所有的观察值加起来，正误差与负误差就基本上抵消了，只留下真值的和，如再除以观察值的个数，就得到了真值.

但是应该注意的是，在实际工作中，由于观察个数 n 不可能无限大，平均观察值也不可能就是真值，它只是真值的一个估计，因为它本身还可能包含一个较小的误差.

以表 1 为例，我们算得油菜亩产量的平均观察值

$$\bar{y}=\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{322+307+\cdots+319}{11}=\frac{3520}{11}=320(\text{斤}).$$

由上所述，我们以 320 斤作为油菜亩产量的(真值)估计.

对同一长度或同一角度进行多次重复测量，由于误差的影响，测量结果也会是不同的. 用平均值来估计被测量的长度或角度的真值，是测量工作中最常用的数理统计方法.

【例 1】 用同一把钢尺，把一段距离反复丈量 10 次，其结果如下(单位为米)：

29.990, 29.991, 29.996, 29.993, 29.999,

29.995, 29.998, 29.994, 29.995, 29.990.

试估计这段距离的真值.

解：这段距离的真值估计为

$$\frac{1}{10}\times(29.990+29.991+29.996+\cdots+29.990)$$

$$=\frac{1}{10}\times 299.941=29.994(\text{米}).$$

【例2】 某生产队贫下中农在农业学大寨运动的推动下，进行了一系列的晚稻良种试验. 表2记录了九个良种的试验产量，每一良种在三个条件基本相同的小区上重复试验，每一小区的面积是0.035亩. 试评定各良种产量高低的位次.

表 2

品种	小区产量(斤)			合计	平均产量	折合亩产量(斤)	产量位次
	1	2	3				
1	25.0	26.0	23.0	74.0	24.7	705.7	5
2	27.5	31.0	26.0	84.5	28.2	805.7	2
3	20.0	22.0	20.0	62.0	20.7	591.4	8
4	26.0	25.0	25.0	76.0	25.3	722.8	4
5	28.0	26.0	28.0	82.0	27.3	780.0	3
6	29.0	28.0	28.0	85.0	28.3	808.6	1
7	23.5	21.5	23.0	68.0	22.7	648.6	7
8	16.5	16.5	11.5	44.5	14.8	422.9	9
9	22.0	24.0	23.0	69.0	23.0	657.1	6

解：我们把计算结果和产量高低的位次都列在表2上.

由表2我们看到，品种6产量最高，平均亩产808.6斤，位列第一，品种8产量最低，平均亩产422.9斤，位列第九.

三、误差的估计与平均偏差平方和

在农业生产中，我们对优良品种的要求不但是高产，而且还要稳产. 所谓稳产就是指某一作物品种在基本相同的生产

条件下，单位产量不要相差太大．用误差的观点来说，要求稳产就是要求误差要小．因为

$$误差=观察值-真值,$$

而真值，可以用平均观察值来估计，所以误差约为

$$观察值-平均观察值.$$

今后，我们把

$$观察值-平均观察值=y-\bar{y} \tag{1}$$

叫做偏差．偏差就是误差的估计．

【例3】 某单位为了寻找高产稳产的油菜品种，选了三个不同的油菜品种进行试验，每一品种在五块试验田上试种，每块试验田的面积为0.08亩，收得产量如表3．试评定哪一个品种既高产又稳产．

表 3

品种	小区产量（斤）					平均产量（斤）
	1	2	3	4	5	
1	21.5	20.4	22.0	21.2	19.9	21.0
2	21.3	23.6	18.9	21.4	19.8	21.0
3	17.8	23.3	21.4	19.1	20.9	20.5

解：我们先算出三种油菜品种各自在五块试验田上的平均产量，然后按(1)式求得偏差，即误差的估计，如表4．

表 4

品种	小区产量偏差				
	1	2	3	4	5
1	0.5	−0.6	1.0	0.2	−1.1
2	0.3	2.6	−2.1	0.4	−1.2
3	−2.7	2.8	0.9	−1.4	0.4

从平均产量来看，品种1和品种2都是高产品种。但是从它们的偏差却看不出哪一个是稳产品种．这是因为每一品种有五个偏差，高低不一，不便比较．最好我们能把每一品种的五个偏差概括起来成为一个数字，比较就方便了．我们经常用平均亩产量来比较生产队的生产水平，这里能不能用平均偏差来比较稳产程度呢？我们来看一看各品种的平均偏差，设 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，$\bar{x}_3$ 分别代表上面三种品种的平均偏差，

$$\bar{x}_1=\frac{1}{5}[0.5+(-0.6)+1.0+0.2+(-1.1)]=\frac{0}{5}=0,$$

$$\bar{x}_2=\frac{1}{5}[0.3+2.6+(-2.1)+0.4+(-1.2)]=\frac{0}{5}=0,$$

$$\bar{x}_3=\frac{1}{5}[(-2.7)+2.8+0.9+(-1.4)+0.4]=\frac{0}{5}=0.$$

三个平均偏差都是零，那么，能否说这三个品种是同样好的稳产品种呢？显然不能．

因为，事实上任何一组 n 个数据的平均偏差都是零．要克服这一缺点，必须设法撇开偏差的正负号．撇开正负号的办法很多，我们这里只介绍其中的一种，就是把每一偏差平方，不管原来的偏差是正还是负，平方后都成为正的了．我们把全组偏差平方的和，除以和式中偏差平方的项数 n 减1的结果，叫做平均偏差平方和，用符号 s^2 表示．把和式中偏差平方的项数减1，即 $n-1$，叫做自由度．

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2. \qquad (2)$$

s^2 是反映一组偏差之间差异大小的一个统计数字，差异大，s^2 的数值大，差异小，s^2 的数值小．一般，我们就凭 s^2 的大小来判别一组偏差之间差异的大小．

设以 s_1^2，s_2^2，s_3^2 分别代表上面三个油菜品种的平均偏差平

方和，

$$s_1^2=\frac{1}{5-1}\times[(0.5)^2+(-0.6)^2+(1.0)^2+(0.2)^2+(-1.1)^2]$$

$$=\frac{1}{4}\times[0.25+0.36+1.00+0.04+1.21]=\frac{2.86}{4}$$

$$=0.72,$$

$$s_2^2=\frac{1}{5-1}\times[(0.3)^2+(2.6)^2+(-2.1)^2+(0.4)^2+(-1.2)^2]$$

$$=\frac{12.86}{4}=3.22,$$

$$s_3^2=\frac{1}{5-1}\times[(-2.7)^2+(2.8)^2+(0.9)^2+(-1.4)^2+(0.4)^2]$$

$$=\frac{18.06}{4}=4.52.$$

可以看出 $s_1^2=0.72$ 最小，所以油菜品种1的五个偏差之间的差异不大，也就是五个小区的产量比较接近，因而它是稳产品种；$s_3^2=4.52$ 最大，所以油菜品种3的五个偏差之间的差异较大，五个小区的产量比较分散，因而它不是稳产品种。结合以前的讨论，我们认为油菜品种1是既高产又稳产的品种。

上面 s^2 的计算是先求出偏差，再按公式(2)计算的。下面我们再介绍一个求 s^2 的公式。

设有 $n=5$ 个数据 y_1，y_2，y_3，y_4，y_5，它们的平均数 $\bar{y}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i$，那么

$$(y_1-\bar{y})^2=y_1^2-2\bar{y}y_1+\bar{y}^2,$$

$$(y_2-\bar{y})^2=y_2^2-2\bar{y}y_2+\bar{y}^2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$(y_5-\bar{y})^2=y_5^2-2\bar{y}y_5+\bar{y}^2.$$

等号两边分别相加，偏差平方和

$$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_5^2)-2\bar{y}(y_1+y_2+\cdots+y_5)+5\bar{y}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{5}y_i^2-2\bar{y}\cdot\sum_{i=1}^{5}y_i+5\bar{y}^2=\sum_{i=1}^{5}y_i^2-2\bar{y}\cdot5\bar{y}+5\bar{y}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{5}y_i^2-5\bar{y}^2=\sum_{i=1}^{5}y_i^2-\frac{(5\bar{y})^2}{5}=\sum_{i=1}^{5}y_i^2-\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{5}y_i\right)^2}{5}。$$

于是

$$s^2=\frac{1}{4}\times\left[\sum_{i=1}^{5}y_i^2-\frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{5}y_i\right)^2\right].$$

对于任意的正整数 n，我们有

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)^2}{n}\right]. \tag{3}$$

以表 3 中油菜品种 1 的五个数据为例，

$$\sum_{i=1}^{5}y_i^2=(21.5)^2+(20.4)^2+(22.0)^2+(21.2)^2+(19.9)^2$$

$$=2207.86,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{5}y_i\right)^2=(21.5+20.4+22.0+21.2+19.9)^2=(105)^2$$

$$=11025.00,$$

$$\frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{5}y_i\right)^2=\frac{11025.00}{5}=2205.00.$$

于是

$$s_1^2=\frac{1}{4}\times\left[\sum_{i=1}^{5}y_i^2-\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{5}y_i\right)^2}{5}\right]=\frac{2207.86-2205.00}{4}$$

$$=\frac{2.86}{4}=0.72.$$

结果与以前按公式(2)求得的相同.

【例 4】 根据表 5 中的数据，试用平均数与平均偏差平方和来评定机床甲、乙的性能.

表 5

每天出废品数 y	天数 机床甲 f_1	机床乙 f_2	$f_1\times y$	$f_2\times y$	$f_1\times y^2$	$f_2\times y^2$
0	6	8	0	0	0	0
1	15	11	15	11	15	11
2	9	7	18	14	36	28
3	0	4	0	12	0	36
总和			33	37	51	75

解：我们将两机床每一废品数乘上相应的天数，写在表5的第四、第五列，然后相加得30天废品总数．如果再除以总天数，那么就可得到平均每天废品数．表5的最后两列是每一废品数的平方乘上相应的天数，每一列的和等于$\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$.

$$\bar{y}_{甲}=\frac{33}{30}=1.10(件),$$

$$\bar{y}_{乙}=\frac{37}{30}=1.23(件).$$

再按公式(3)计算，得

$$s_{甲}^2=\frac{1}{30-1}\times\left[51-\frac{(33)^2}{30}\right]=\frac{1}{29}(51-36.30)=0.51,$$

$$s_{乙}^2=\frac{1}{30-1}\times\left[75-\frac{(37)^2}{30}\right]=\frac{1}{29}(75-45.63)=1.01.$$

由此看出机床甲不但平均每天所出的废品数少，并且每天所出的废品数变异不大．说明它的性能比机床乙好．

在这一节里，我们讨论了平均数和平均偏差平方和．它们是依据实地观察得来的数据计算出来的两个统计数字，也是数理统计中两个基本概念，它们有着广泛的应用，希望读者能掌握它们的意义并熟练各种计算方法．

小　结

数理统计方法就是把大量实地观测得来的数据进行分析研究的一种数学方法．误差的研究是数理统计方法的内容之一．

数据总是有误差的，误差值在零的左右波动，观察所得的数据越多，误差的代数和越接近于零．误差可以用偏差来估计．

平均数和平均偏差平方和是两个基本统计数字：

(1) 平均数可用来表示一组数据的平均水平，估计一组数据的真值．计算公式是

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i.$$

(2) 平均偏差平方和可用来描述数据在平均数附近波动的情况．计算公式是

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left\{\sum y_i^2-\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)^2}{n}\right\}.$$

习　题

1．什么是平均数？试结合具体例子说明平均数的作用与意义．

2．什么是误差？怎样估计？误差具有哪些特性？在实验操作过程中，凡需要测定一个量时总要求重复测量几次，这是为什么？

3．为什么不能用平均偏差来比较稳产程度？

4．什么是平均偏差平方和？试结合具体例子说明平均偏差平方和的作用与意义．

5．某养猪场对 35 头猪过磅．重量(斤)记录如下：

116, 118, 127, 120, 124, 123, 108, 120, 122, 119,
130, 110, 117, 109, 121, 124, 111, 117, 125, 134,
150, 117, 121, 120, 120, 119, 113, 121, 123, 124,
116, 118, 132, 122, 124.

计算它们的平均数及平均偏差平方和．

6．某工厂测量 500 只灯泡的寿命(单位：小时)，记录如下：

寿　命	450　550　650　750　850　950　1050　1150
只　数	25　65　79　108　92　76　34　21

计算它们的平均寿命.

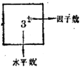
7. 试比较表2中九个晚稻品种的稳产程度.

第二节　试验设计

农作物的生长过程是一个复杂的过程. 为了提高产量, 不但要选用良种, 还要根据农作物生长的内在规律, 提供合适的土、肥、水等生长条件, 做好栽培管理. 但是如何选择和培育良种, 又如何根据农作物的生长规律, 寻找适当的栽培管理方法呢? 那就得"一切经过试验". 田间小区科学试验是研究和解决这类问题的有效方法. 通常, 我们对小区试验的结果进行分析比较, 得出结论, 然后到大田去验证; 在反复试验, 取得经验之后, 再作大面积推广.

一、做试验要注意的几个问题

1. 试验要有针对性　在做试验之前, 首先要明确试验的目的, 针对这一目的, 挑选出一个或几个最有影响的因素作为考察对象. 我们把考察的对象叫做因子. 每一因子可以选择几种状态, 一种状态为一个水平. 比如在一个比较三个水稻良种的试验中, 种子就是试验的因子, 它有三个品种, 即三个水平. 如果不再考察其他因素, 这就是一个单因子三水平的试验, 以后简记为 3^1 试验, 其中



又如在另一个使水稻增产的栽培试验中，我们考察三个因子，即根外施肥的种类、施氮肥数量和行、株距规格．根外施肥的种类取两个水平：(1)喷施自制“九二〇”生长激素，每亩一斤；(2)喷施腐植酸铵，每亩二两．氮肥用量取两个水平：(1)每亩20斤；(2)每亩25斤．行、株距也取两个水平：(1)4寸×4寸；(2)5寸×4寸．这是一个2^3试验．我们可把因子和水平列表如下：

表 6

水平＼因子	根外施肥 A	施氮肥 B	插植规格 C
1	920	20斤/亩	4寸×4寸
2	腐植酸铵	25斤/亩	5寸×4寸

2．田块的选择　土壤对农作物的影响很大，因此，试验田田块的选择很重要．例如，在比较三个水稻高产良种的试验中，三个品种一定要种在条件尽可能相同的田块里．否则，在分析试验结果时，将分辨不出产量的高低是由于品种的好坏呢，还是由于田块的差别．试验田的田块以地势平坦，肥力均匀，位置适当为宜．屋边田由于房屋的遮阴，日照、雨、露均受影响；路边田易受人畜践踏，它们均不适宜作试验田．有的田块虽然肥力并不均匀，但是如果做一些适当的安排，仍可

选作试验田．例如，有一块田的肥力趋向是北高南低，试验田块沿南北方向划分，使每一小区田块的肥力都是北高南低．这样，田块的肥力条件就基本一致了，见图 12-2．前茬作物不同，也会造成土壤肥力的差异．如果一块田东西两边的前茬作物分别是稻秧和绿肥，那么试验田块的划分宜沿东西方向，见图 12-3．经验证明，选用狭长的田块比选用方形的田块，肥力所造成的试验误差要小．

图 12-2

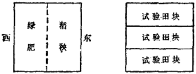


图 12-3

3．栽培管理条件　在田间小区试验中，除规定的因子和水平外，其他栽培管理应尽可能相同，否则也会影响对试验结果的分析．

4．重复试验　田间小区试验如同其他试验一样，试验所得的数据总是有误差的．为了减少误差的影响，提高试验结论的可靠程度，在人力、物力允许的条件下，可同时安排三至五次的重复试验．

二、田间试验设计

田间小区试验还有一项准备工作，就是如何安排试验．我们把这项工作叫做试验设计．试验设计得好，试验次数不多却可以得到满意的结果；设计得不好，次数多而结果却不一定好，甚至失败．如何设计试验是一个十分重要而又比较复杂的问题．下面介绍几种常用的设计方法．

1．对照试验设计　毛主席教导我们："有比较才能鉴别。"在做品种试验时，我们往往用一对照品种作为比较的标准．一般总以在本地已栽培多年，对它的生长、发育及栽培管理等比较清楚的稳产高产品种，作为对照品种．待试验的新品种采取与对照品种同样的栽培管理方法．在做栽培技术的试验时，可以本地常用的效果较好的栽培方法作为对照方法进行比较．这种有对照的试验叫做对照试验．对照试验的田块安排方法叫做对照试验设计．下面，我们举几个具体例子．

【例 1】　在一个比较三个水稻品种的 3^1 试验中，品种 1 和 2 是被试验的新品种，品种 3 是对照品种．我们把对照品种的田块插在其他两个品种的田块之间，如图 12-4，这样可使对照品种和其他品种的土壤条件更为相近．田块四周要留出保护区．图中每一小块内的数据为折合亩产量(斤)．把品种 1、2 的亩产量与对照品种 3 的亩产量进行比较，品种 1 与

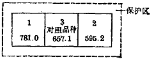


图 12-4

对照品种的亩产量的比值是

$$781.0 \div 657.1 = 118.9\%,$$

品种 2 与对照品种的亩产量的比值是

$$595.2 \div 657.1 = 90.6\%.$$

由此可见，品种 1 的产量比对照品种高 18.9%；品种 2 的产量比对照品种低 9.4%．显然，品种 1 的产量较高．但应该指出的是：这是在采用适合对照品种的栽培管理方法下得出的结论．如果采用适合品种 1 或 2 本身的栽培管理方法，那么，它们的产量可能还要高些，这就需要作进一步的试验了．

【例 2】 在另外一个水稻品种的试验中，共有七个品种，记作品种 1, 2, …, 7, 其中品种 7 为对照品种．要有七块土壤条件基本相同的试验田是比较困难的，为此，我们采取重复试验的办法．仍用对照试验设计安排田块，如图 12-5, 图中每一小块内下面的数据为折合亩产量．这是一个 7^1 试验，总共做了 27 次，其中对照品种重复了 9 次，其他品种重复了 3 次．现在根据所获得的数据，分析各品种的优劣如下：以品种 1 为例，在第一次重复中，品种 1 的亩产量与对照品种亩产量

1 720	对照 760	2 800	3 880	对照 840	4 800	5 920	对照 800	6 760
3 960	对照 880	4 920	5 920	对照 800	6 720	1 720	对照 760	2 800
5 960	对照 800	6 680	1 800	对照 840	2 800	3 880	对照 800	4 880

保护区

图 12-5

的比值是

$$720 \div 760 = 94.74\%,$$

在第二次重复中，这个比值是

$$800 \div 840 = 95.24\%,$$

在第三次重复中，这个比值是

$$720 \div 760 = 94.74\%.$$

对这三个比值求平均值，得

$$\frac{1}{3} \times (94.74\% + 95.24\% + 94.74\%) = 94.90\%$$

这就是说品种1的亩产量比对照品种的亩产量平均约低5.1%.

将各个品种与邻近的对照品种亩产量相比的结果列表于下：

表 7

重复	各品种与邻近对照品种亩产量的比值(%)					
	1	2	3	4	5	6
I	94.74	105.20	109.09	104.55	120.00	85.00
II	95.24	95.24	104.76	95.24	115.00	90.00
III	94.74	105.20	110.00	110.00	115.00	95.00
平均	94.90	101.88	107.95	103.26	116.67	90.00
位次	5	4	2	3	1	6

从表中计算的结果可见，品种5最优，品种6最差．我们可以对每一品种的亩产量作一估计．以品种5为例，我们先计算九个对照品种的平均亩产量

$$\frac{1}{9}\times(760+840+800+880+800+760+800+840+800)$$

$$=\frac{7280}{9}=808.9(\text{斤}),$$

那么，品种 5 的亩产量的估计值是

$$808.9\times116.67\%=942.8(\text{斤}).$$

读者可能要问：为什么不取品种 5 三次重复试验的亩产量的平均

$$\frac{1}{3}(920+920+960)=933.3(\text{斤})$$

作为它亩产量的估计值呢？当然我们也可以这样做，问题是怎样做更为好些. 因为前面的做法取用了 12 个数据——对照品种的平均亩产量是根据九次重复试验得来的，116.67% 是三个比值的平均，所以从误差的观点来看，942.8 斤的估计值应该比只用三个数据估计出来的 933.3 斤来得可靠.

2. 拉丁方试验设计　图 12-6 是一个 3×3 的拉丁方. 它的(横)行数和(纵)列数都是 3，在每一行或每一列中，数字 1，2，3 都正好各出现一次. 由于最初排这种方形不是用数字而是用拉丁字母，所以这种方形也就叫做拉丁方. 方形的行(列)数叫做拉丁方的阶.

这里要注意，数字 1，2，3 在每一行和每一列中正好各出

1	2	3
2	3	1
3	1	2

图 12-6

1	2	3
1	2	3
2	3	1

图 12-7

现一次，否则，就不是拉丁方，比如图 12-7 就不是一个拉丁方.

拉丁方的排法很简单．以 4×4 拉丁方为例，把数字 1, 2, 3, 4 依次沿着顺时钟方向写在一个圆周上。

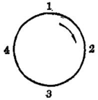


图 12-8

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

图 12-9

第一行由 1 开始，沿着箭头得 1, 2, 3, 4. 第二行由 2 开始，沿着箭头得 2, 3, 4, 1. 第三行由 3 开始，沿着箭头得 3, 4, 1, 2. 第四行由 4 开始，沿着箭头得 4, 1, 2, 3. 这样就得到一个拉丁方，如图 12-9. 如果把它的任意两列(行)对换一下，就得到另一个同阶拉丁方（表 8 所用的拉丁方就是把图 12-6 的第 1、2 两列对换而得来的）. 拉丁方可在一些数理统计用表中查得.

那么，拉丁方对安排试验有什么作用呢？我们举一个例子来说明.

【例 3】 某公社考虑移植外地优良小麦品种，选了 1, 2, 3 三个品种进行试验．选定一块试验田，把试验田分成九个小区，每个品种各占三个小区，按拉丁方排列，如表 8. 表中每一小区内除注明品种 1, 2, 3 外，还注出该品种的折合亩产量(斤)．由于拉丁方的特性，每一品种在每行、每列都各出现一次，这种排列的好处是不但可以比较品种的优劣，还可比较

表 8

2 660	1 612	3 560
3 548	2 648	1 600
1 620	3 544	2 656

行之间土壤肥力的差异．因为在每行内，三种品种都各出现一次，如果土壤肥力没有差异，那么每行的三种品种的产量和，不应有太大的(数理统计上称显著的)差异；如果有显著的差异，则很可能是各行的土壤肥力有差异．列之间土壤肥力有无差异也可作同样的比较．

现在我们对表 8 中的数据进行分析．先求出各平均数如表 9：

表 9

	平均数			
	1	2	3	
行	610.7	598.7	606.7	
列	609.3	601.3	605.3	
品 种	610.7	654.7	550.7	
总平均				605.3

其中总平均数是表 8 中九个数据的平均

$$\frac{1}{9}(660+612+560+\cdots+544+656)=\frac{5448}{9}=605.3,$$

行 1 的平均数就是表 8 中第一行三个数据的平均，

$$\frac{1}{3}(660+612+560)=\frac{1832}{3}=610.7,$$

它与总平均数的偏差主要反映了第一行土壤肥力的影响．列2的平均数就是表8中第二列三个数据的平均，

$$\frac{1}{3}(612+648+544)=\frac{1804}{3}=601.3,$$

它与总平均数的偏差主要反映了第二列土壤肥力的影响．品种3的平均数就是表8中注有"3"的三个数据的平均，

$$\frac{1}{3}(560+548+544)=\frac{1652}{3}=550.7,$$

它与总平均数的偏差主要反映了第三种品种的影响．其余类推．

再算出各行、各列、各品种平均数与总平均数的偏差如表10.

表 10*

	偏差		
	1	2	3
行	5.4	-6.6	1.4
列	4.0	-4.0	0
品种	5.4	49.4	-54.6

由表10可见品种之间差异较大，品种2产量最高，品种3产量最低，而行之间的差异和列之间的差异都比较小，可以认为对亩产量没有什么影响，因此决定选用品种2.

3．F比　上面的分析虽然简单，但多少带点主观的成分．我们说品种之间的差异大，行之间的差异和列之间的差

* 这里第一行至第三行的偏差和不等于零，是由于计算平均数时取了近似值的缘故。

异都小，这完全是凭直观．为了建立一个客观标准，我们引入 F 比的概念．

让我们再看一下表 8 中每一块田的折合亩产量，它们与总的平均产量所以有差异，其原因主要有下列四种：

(1) 品种之间有差异，

(2) 行之间有差异，

(3) 列之间有差异，

(4) 误差．

现在首先要求出各种差异究竟有多大，才能进一步作比较．在第一节中，我们已经知道，平均偏差平方和是反映一组数据偏差间差异大小的一个统计数字．为了求得各组偏差的平均偏差平方和，我们这里先算出各种情况的偏差平方和，由表 10 我们算得

$$\begin{aligned}品种间偏差平方和 &= 3\sum_{a=1}^{3}(\bar{y}_a-\bar{y})^2\\ &= 3\times[5.4^2+49.4^2+(-54.6)^2]\\ &= 3\times 5450.68 = 16352.04,\end{aligned}$$

$$自由度 = 3-1 = 2.$$

在上面的计算里为什么要乘上 3 呢？这是因为整个试验中，每个品种重复了三次，所以用三个品种平均数的偏差平方和来表示全部九个试验的各品种产量总的偏差平方和时，就一定要乘 3．

同样，

$$\begin{aligned}行之间的偏差平方和 &= 3\sum_{b=1}^{3}(\bar{y}_b-\bar{y})^2\\ &= 3\times[5.4^2+(-6.6)^2+1.4^2]\\ &= 3\times 74.68 = 224.04,\end{aligned}$$

$$自由度 = 2.$$

算式中乘 3 的道理与上面相同.

$$\text{列之间的偏差平方和} = 3\sum_{c=1}^{3}(\bar{y}_c - \bar{y})^2$$

$$= 3\times[4.0^2 + (-4.0)^2 + 0]$$

$$= 3\times 32.00 = 96.00,$$

自由度 = 2.

算式中乘 3 的道理也与上面相同.

表 10 中全部九个数据的偏差平方和, 即

$$\text{总的偏差平方和} = \sum_{i=1}^{9}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{9}y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{9}y_i\right)^2}{9}$$

$$= 660^2 + 612^2 + 560^2 + \cdots + 544^2 + 656^2$$

$$- \frac{5448^2}{9} = 3314624 - 3297856$$

$$= 16768,$$

自由度 = 8.

总的偏差平方和反映了九个产量间的全体差异, 它包含了全部四种原因的差异, 即总的偏差平方和等于上述全部四种原因的偏差平方总和. 所以, 误差的偏差平方和只要从总的偏差平方和中减去其他三种已算出的偏差平方和就可得到, 它的自由度也等于总的偏差平方和的自由度减去其他三种已知的偏差平方和的自由度. 于是

$$\text{误差的偏差平方和} = 16768.00 - 16352.04 - 224.04$$

$$- 96.00 = 95.92,$$

自由度 = 8 − 2 − 2 − 2 = 2.

把相应的自由度去除这四种原因的偏差平方和, 就得到四种原因的平均偏差平方和.

代表品种间差异大小的平均偏差平方和

$$s^2_{种}=\frac{1}{2}\times 16352.04=8176.02;$$

代表行之间差异大小的平均偏差平方和

$$s^2_{行}=\frac{1}{2}\times 224.04=112.02;$$

代表列之间差异大小的平均偏差平方和

$$s^2_{列}=\frac{1}{2}\times 96.00=48.00;$$

代表误差大小的平均偏差平方和

$$s^2_{误}=\frac{1}{2}\times 95.92=47.96.$$

经过上面的分析计算，我们已将不同品种、不同行、不同列以及误差对产量影响的程度分别用各自的平均偏差平方和表示出来了. 但是我们要解决的问题是，不同品种对产量是否有显著影响. 这就使我们进一步想到，把 $s^2_{种}$ 和 $s^2_{误}$ 进行比较. 因此，作比值:

$$F=\frac{s^2_{种}}{s^2_{误}}=\frac{8176.02}{47.99}=170.48.$$

如果比值较小，则说明了不同品种所引起的产量的差异和误差差不多，就是说不同品种对产量的影响不显著，所以可认为各产量间的差异主要是由于误差引起的；如果比值较大，则各产量间的差异就可看作主要是品种的影响. 那么，用什么标准来判定比值的大小呢？我们可以查附录四中的 F 表. 表中相应的数值是我们进行判断的界限. 附录四中 F 表有两张，分别是 $\alpha=5\%$, $\alpha=10\%$. α 为信度，设给定 $\alpha=5\%$，查 $\alpha=5\%$ 的 F 表，表中的 n_1 表示比值中分子的自由度，n_2 表示分母的自由度. 上面的 F 比中 $n_1=2$, $n_2=2$, 查表，$n_1=2$ 的列和 $n_2=2$ 的行交叉处的数值

$$F_\alpha(n_1, n_2)=F_{0.05}(2, 2)=19,$$

就是我们所要求的界限．因为比值

$$F=170.37>F_{0.05}(2, 2)=19,$$

所以我们判断品种是有显著差异的．判断正确的可能性是 $1-\alpha=95\%$，判断错误的可能性是 $\alpha=5\%$．

对行之间的差异和列之间的差异是否显著都可作同样的判断，即把它们的偏差平方和分别除以误差的偏差平方和得出 F 比值，然后与 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 进行比较．我们把计算结果列成表 11．

表 11　方差分析表

来　源	偏差平方和	自由度	平均偏差平方和	F 比	显著性
品种	16352.04	2	8176.02	170.48	*
行	224.04	2	112.02	2.34	
列	96.00	2	48.00	1.00	
误差	95.92	2	47.96		
总和	16768.00	8			

$F_{0.05}(2, 2)=19$

表中的"*"号表示显著，不打"*"号，说明不显著．这样的分析过程通常叫做方差分析，所以表 11 就叫做方差分析表．这里方差分析的结果和以前直观的分析恰好一致．

通过以上的讨论，我们可以进一步看出，拉丁方试验设计的优点在于它能从总的差异中分离出行之间土壤肥力所引起的差异和列之间土壤肥力所引起的差异，从而可以更准确地得出误差，提高对试验结果分析的准确性．但是拉丁方试验设计所要求的重复次数和因子的水平数一样多，这样就增加了试验的工作量，所以在实际工作中，用来安排试验的拉丁方的阶数很少超过 8．

4. 正交试验设计　上面我们介绍了两种单因子的试验设计——对照试验设计和拉丁方试验设计．但“世界上的事情是复杂的，是由各方面的因素决定的”，在农业生产中除了单因子试验外，往往还要进行大量的多因子试验．多因子试验的实质就是要找出因子间各水平的最优搭配方案．例如一个三个二水平因子的 2^3 试验，它共有 $2\times2\times2=2^3=8$ 种因子间各水平的搭配，如果各因子分别用大写字母 A，B，C 表示，各因子的水平分别用 A_1，A_2，B_1，B_2，C_1，C_2 表示，那么这八种搭配可表示如下：

(1) $A_1B_1C_1$	(2) $A_1B_1C_2$
(3) $A_1B_2C_1$	(4) $A_1B_2C_2$
(5) $A_2B_1C_1$	(6) $A_2B_1C_2$
(7) $A_2B_2C_1$	(8) $A_2B_2C_2$

这个多因子试验问题就是如何从所有可能的八种搭配中找出最优的一种搭配，这里的最优是相对于八种搭配而讲的．

但是当因子及因子的水平数较多时，如果要对所有的搭配都做试验的话，那么虽然对试验项目的内部规律揭示得比较清楚，但试验的次数多，时间长，费用大，以至于事实上往往不能办到．

因此，在因子较多时，如何既能减少试验次数，又能较全面地揭示内部规律，就是我们迫切需要解决的问题．

正交试验设计就是解决多因子试验问题的一种重要的数学方法．用这种方法，不但可以减少试验次数，还可以全面地进行分析比较．

实际进行正交试验设计时，是采用一种预先编排好的正交表来安排试验和分析试验结果的．最简单的正交表是 $L_4(2^3)$．

先说一下符号 $L_4(2^3)$ 的含意. 记号"L"表示正交的意思,"4"表示有四(横)行,即要做四次试验,"3"表示有三(纵)列,"2"表示表的主要部分只有两种数字,即 1 和 2,称之为 1 水平和 2 水平. 表 12 中,任意两列的二个水平间正好各碰到一次,搭配是很均匀的.

表 12　正交表 $L_4(2^3)$

试验号 \ 列号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

常见的正交表有: $L_4(2^3)$, $L_8(2^7)$, $L_{16}(2^{15})$, …, $L_9(3^4)$, $L_{27}(3^{13})$, …, $L_{16}(4^5)$, …, $L_{25}(5^6)$, …见附录三.

现在我们通过例子来说明如何选用正交表设计试验计划,分析试验结果.

【例 4】 某县农科所为了寻求使花生高产的较合适的施肥方法. 对氮、磷、钾三种肥料及石灰的用量进行了试验. 试验的因子有四个, 即氮肥(施湿牛粪)A, 磷肥(施过磷酸钙)B, 钾肥(施草木灰)C 及石灰 D. 根据生产的经验和条件,各因子分别取三个水平如下表:

表 13

水平 \ 因子	氮 A(斤/亩)	磷 B(斤/亩)	钾 C(斤/亩)	石灰 D(斤/亩)
1	450	60	100	70
2	1125	45	150	50
3	1800	30	200	30

这是一个四因子三水平的 3^4 试验，全部搭配共有 $3^4=81$ 个，现在选用正交表 $L_9(3^4)$，只要做九次试验．四个因子 A、B、C、D 分别放在 $L_9(3^4)$ 表中的任意一列，如 A 放在第 1 列，B 放在第 2 列，C 放在第 3 列，D 放在第 4 列，再在各列的水平数字“1”，“2”，“3”旁，按表 13 的规定写上各因子的具体水平．这样，就得出一个试验计划，如表 14．

表 14　试验计划

试验号＼因子	氮 A		磷 B		钾 C		石灰 D	
	1		2		3		4	
1	1	450	1	60	1	100	1	70
2	1	450	2	45	2	150	2	50
3	1	450	3	30	3	200	3	30
4	2	1125	1	60	2	150	3	30
5	2	1125	2	45	3	200	1	70
6	2	1125	3	30	1	100	2	50
7	3	1800	1	60	3	200	2	50
8	3	1800	2	45	1	100	3	30
9	3	1800	3	30	2	150	1	70

按照表 14 的试验计划进行试验，花生产量为考核指标，产量越高越好，记录各次试验的结果，并作分析计算如表 15．

表中 I_j 表示正交表中第 j 列的“1”水平所对应的试验结果之和，II_j 表示正交表中第 j 列的“2”水平所对应的试验结果之和，III_j 表示正交表中第 j 列的“3”水平所对应的试验结果之和．$\bar{I}_j=\frac{1}{3}I_j$，表示第 j 列的“1”水平所对应的试验结果的平均值，$\overline{II}_j=\frac{1}{3}II_j$ 表示第 j 列的“2”水平所对应的试验结果的平均值，$\overline{III}_j=\frac{1}{3}III_j$ 表示第 j 列的“3”水平所对

表 15 试验结果分析计算表

列号 / 试验号	1	2	3	4	试验结果（斤）
1	1	1	1	1	32.5
2	1	2	2	2	33.0
3	1	3	3	3	28.9
4	2	1	2	3	30.7
5	2	2	3	1	32.7
6	2	3	1	2	30.4
7	3	1	3	2	33.5
8	3	2	1	3	34.4
9	3	3	2	1	32.1
I_j	94.4	96.7	97.3	97.3	$\sum_{i=1}^{9} y_i=288.2$
II_j	93.8	100.1	95.8	96.9	
III_j	100.0	91.4	95.1	94.0	$\bar{y}=\frac{1}{9}\sum y_i=32.0$
$\bar{I}_j$	31.5	32.2	32.4	32.4	
$\overline{II}_j$	31.3	33.4	31.9	32.3	
$\overline{III}_j$	33.3	30.5	31.7	31.3	
最大－最小	2.0	2.9	0.7	1.1	

应的试验结果的平均值. 以第 1 列和第 3 列为例:

$$I_1=32.5+33.0+28.9=94.4,\qquad \bar{I}_1=\frac{94.4}{3}=31.5,$$

$$II_1=30.7+32.7+30.4=93.8,\qquad \overline{II}_1=\frac{93.8}{3}=31.3,$$

$$III_1=33.5+34.4+32.1=100.0,\qquad \overline{III}_1=\frac{100}{3}=33.3;$$

$$I_3=32.5+30.4+34.4=97.3,\qquad \bar{I}_3=\frac{97.3}{3}=32.4,$$

$$II_3=33.0+30.7+32.1=95.8,\qquad \overline{II}_3=\frac{95.8}{3}=31.9,$$

$$Ⅲ_3=28.9+32.7+33.5=95.1,\ \overline{Ⅲ}_3=\frac{95.1}{3}=31.7.$$

把这些数分别填入表 15 第 1 列和第 3 列的 I_j, $Ⅱ_j$, $Ⅲ_j$, $\bar{I}_j$, $\overline{Ⅱ}_j$, $\overline{Ⅲ}_j$ 各行内. 其他各列作同样的计算并填入表内. 再计算出九次试验结果的总和

$$\sum_{i=1}^{9} y_i=32.5+33.0+\cdots+32.1=288.2,$$

以及九次试验结果的平均值

$$\bar{y}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} y_i=\frac{288.2}{9}=32.0.$$

熟悉了这些程序以后, 计算可以直接在表 15 上进行, 见图 12-10.

注意, $\sum y_i$ 可用来验算各列 I_j, $Ⅱ_j$, $Ⅲ_j$ 值的计算是否正确, 因为

$$I_j+Ⅱ_j+Ⅲ_j=\sum_{i=1}^{9} y_i.$$

表 15 的最后一行是同一列的 $\bar{I}_j$, $\overline{Ⅱ}_j$, $\overline{Ⅲ}_j$ 之中的最大值与最小值的差, 我们把它叫做极差. 显然, 第 1 列的极差是

$$33.3-31.3=2.0.$$

极差值大的因子对指标的影响就大, 是影响产量的主要因素; 反之, 极差值小的因子对指标的影响就小, 是影响产量的次要因素. 因此上述四个因子中, B 为主, A、C、D 为次. 然后再观察每一因子各水平的

试验号\列号	1	2	3	4	试验结果 (y)
1					
2			2		33.0
3					
4			2		30.7
5					
6					
7					
8					
9			2		32.1
I_j					
$Ⅱ_j$			95.8		
$Ⅲ_j$					
$\bar{I}_j$					
$\overline{Ⅱ}_j$					
$\overline{Ⅲ}_j$					
极差					

33.0+30.7+32.1=95.8

图 12-10

平均试验结果，哪一个水平的平均值最大就挑选那个水平的施肥量。

综合上面的分析,最合适的施肥量是:每亩施湿牛粪1800斤，过磷酸钙45斤，草木灰100斤,石灰70斤．如用符号来表示，这个最佳水平搭配就是 $A_3B_2C_1D_1$，它并不包括在已做的九个试验中．为了证实分析结论，应将这个最佳水平搭配 $A_3B_2C_1D_1$ 和九个试验中最好的第8号试验 $A_3B_2C_1D_3$ 再做一个对照试验．

知道了正交表的使用方法后，我们再来考虑这样做的理由．我们做试验,就是为了比较．但是,正交表上任何两个试验都不可以拿来对某一因子的各个水平作出比较．比如在表15上，我们不能通过第1、第4这两号试验来比较因子 A“1”水平和“2”水平的影响,因为这两号试验除了因子 A 外，其他各个因子所取的水平并不完全相同．不过只要把表15中九个试验适当地组合一下,我们就可以作出某种比较了．

以表15中的因子 A 为例,它的“1”水平 A_1 出现于第1～3号试验中,这三个试验产量的平均数是

$$\bar{I}_1=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)=31.5,$$

它的“2”水平 A_2 出现于第4～6号试验中,这三个试验产量的平均数是

$$\overline{II}_1=\frac{1}{3}(y_4+y_5+y_6)=31.3.$$

$\bar{I}_1$ 和 $\overline{II}_1$ 就可用来比较 A_1 和 A_2 的好坏．因为在 A_1 条件下的三次试验(1～3号)中,因子 B, C, D 都取遍三个水平,而且三个水平出现的次数相同，各为一次；同样，在 A_2 条件下的三次试验(4～6号)中，B, C, D 也都取遍三个水平，且三个水平出现的次数也相同,各为一次，于是,对于在 A_1 条件下的

三次试验和在 A_2 条件下的三次试验来说，虽然其他条件(B, C, D)在变动，但这种变动在两组试验中却都是一样的，所以 $\bar{I}_1$ 和 $\bar{II}_1$ 之间的差异反映了因子 A 两个水平的好坏(当然不可避免地还混有误差的影响)．其他因子的各个水平也都可以作这样的比较．

5．有交互作用的试验　有的试验，因子间有相互影响，这种因子间的相互影响叫做交互作用．

例如，某生产队对四块大豆田，施了不同数量的氮肥和磷肥，平均亩产如表 16.

表 16

因子 / 试验号	氮肥 N(斤)	磷肥 P(斤)	亩产量(斤)
1	0	0	400
2	6	0	430
3	0	4	450
4	6	4	560

从表中看出，大豆田在不施氮、磷肥的情况下，产量为每亩 400 斤，只施 6 斤氮肥，亩产量增加 30 斤；只施 4 斤磷肥，亩产量增加 50 斤；同时施 6 斤氮肥和 4 斤磷肥，亩产量增加 160 斤．显然，这里除了氮肥和磷肥单独增产的效果外，还有它们的交互作用产生的增产效果．这种交互作用今后表示成 $N\times P$.

类似这样的情况在试验中是经常会碰到的，因此在用正交表安排试验时，就要考虑到因子之间的交互作用对试验指标的影响．

【例 5】 某公社农科站为了提高水稻产量，对某一水稻品种移栽时的秧龄，每亩移栽的秧苗数及每亩施肥的纯氮数量进行了试验，具体情况列表如下：

因子 水平	秧龄 A	秧苗数 B	纯氮 C
1	小苗	15 万	8 斤
2	大秧	25 万	12 斤

这里一共有三个因子，秧龄 A，秧苗数 B，纯氮 C. 为了探索它们单独的效果以及 $A\times C$ 和 $B\times C$ 交互作用的效果，我们选用正交表 $L_8(2^7)$. 有了交互作用，正交表上置放因子就不能如以前那样随意了. 每张正交表都附有一张交互作用表. $L_8(2^7)$ 的交互作用表如下：

列号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
	(1)	3	2	5	4	7	6
		(2)	1	6	7	4	5
			(3)	7	6	5	4
				(4)	1	2	3
					(5)	3	2
						(6)	1
							(7)

表中的(1)，(2)，…，(7)代表正交表的列号. 在设计试验计划时，我们先从置放任何两个具有交互作用的因子开始，例如把因子 A 放在第 1 列，把因子 C 放在第 4 列，那么，交互作用 $A\times C$ 所占的列可以从交互作用表中查得，它的序号就是横(1)和纵(4)交叉的"5". 故第 5 列不能再置放其他因子，

然后，考虑置放因子 B，它可以放在 2, 3, 6, 7 四列中的任一列. 如把 B 放在第 2 列上，由于 C 已放在第 4 列上，所以 $B\times C$ 所占的列的序号应是交互作用表上横(2)和纵(4)交叉的"6". 这样就得到一个在正交表上安排因子的表头设计如下：

表头设计	A	B		C	$A\times C$	$B\times C$	
列　号	1	2	3	4	5	6	7

因子 A、B、C 所占的列就组成一个试验计划，如表 17.

表 17

试验号 \ 因子	秧龄 A	苗数 B	纯氮 C
	1	2	4
1	1 小苗	1　15 万	1　8 斤
2	1 小苗	1　15 万	2　12 斤
3	1 小苗	2　25 万	1　8 斤
4	1 小苗	2　25 万	2　12 斤
5	2 大秧	1　15 万	1　8 斤
6	2 大秧	1　15 万	2　12 斤
7	2 大秧	2　25 万	1　8 斤
8	2 大秧	2　25 万	2　12 斤

试验结果和分析计算列于表 18. 这里因子 A, B, C 三列和交互作用 $A\times C$, $B\times C$ 两列都要进行分析计算，其步骤与以前一样，但要指出的是，表中 $\overline{I}_j$ 和 $\overline{II}_j$ 都是四个数据的平均.

根据极差的大小，因子和交互作用的主次关系排列如下：

$$A,\ C,\ B\times C,\ B,\ A\times C.$$

这表明秧龄 A 对水稻产量起主要影响，氮肥其次，秧苗数和

表 18

试验号 \ 因子	A 1	B 2	3	C 4	$A\times C$ 5	$B\times C$ 6	7	试验结果 (斤/亩)
1	1	1	1	1	1	1	1	600.0
2	1	1	1	2	2	2	2	613.3
3	1	2	2	1	1	2	2	600.6
4	1	2	2	2	2	1	1	606.6
5	2	1	2	1	2	1	2	674.0
6	2	1	2	2	1	2	1	746.6
7	2	2	1	1	2	2	1	688.0
8	2	2	1	2	1	1	2	686.6
I_j	2420.5	2633.9		2562.6	2633.8	2567.2		$\sum y_i=5215.7$
II_j	2795.2	2581.8		2653.1	2581.9	2648.5		
$\bar{I}_j$	605.1	658.5		640.7	658.5	641.8		
$\bar{II}_j$	698.8	645.5		663.3	645.5	662.1		
极 差	93.7	13.0		22.6	13.0	20.3		

氨肥的交互作用第三，其他因子和交互作用的影响不大.

在选取最佳水平搭配时，不但要考虑到各因子的单独影响，还要考虑到它们间的交互作用.

例如，单从第2列和单从第4列来看，因子 B 和 C 应分别取“1”水平和“2”水平. 再看表18中的第6列，$B\times C$ 的“1”水平对应着四个数据，其中两个数据是在 B 和 C 都取“1”水平的条件下获得的，它的平均值是

$$\frac{1}{2}\times(600.0+674.0)=637.0,$$

另外两个数据是在 B 和 C 都取“2”水平的条件下获得的，它的平均值是

$$\frac{1}{2}\times(606.6+686.6)=646.6.$$

$B\times C$ 的“2”水平也对应着四个数据，其中两个数据是在 B 取“1”水平、C 取“2”水平的条件下获得的，它的平均值是

$$\frac{1}{2}\times(613.3+746.6)=680.0,$$

另外两个数据是在 B 取“2”水平、C 取“1”水平的条件下获得的，它的平均值是

$$\frac{1}{2}\times(600.6+688.0)=644.3.$$

把所求得的平均值归纳成表19.

表 19

C \ B	B_1	B_2
C_1	637.0	644.3
C_2	$\boxed{680.0}$	646.6

从上面的平均值来看，应取较高的 B_1C_2. 这样的水平搭配与单独分析因子 B 和 C 所得的结论并无矛盾.

我们对因子 A 和交互作用 $A\times C$ 也作同样的分析. 最后得出最佳水平搭配 $A_2B_1C_2$，这说明每亩移栽大秧 15 万株，施纯氮 12 斤，能使秧苗早日发育生长，就有把握增产. $A_2B_1C_2$ 的搭配恰好是第 6 号试验，亩产是 746.6 斤.

在分析过程中，如发现分析交互作用效果所得到因子的较优水平与分析因子单独效果所得到的较优水平有矛盾时，则应根据具体情况作具体的分析.

6. *正交试验设计的方差分析* 上面我们介绍了正交试验设计的直观分析法. 它的优点是根据试验结果经少量计算后，直接比较，便可得出最优栽培方案. 缺点是不能得出误差大小的估计，也就不能知道分析的可靠程度. 为了提高分析结果的可靠程度，我们可以象在拉丁方试验设计中那样，对正交试验所得的数据进行方差分析.

现在仍以表 18 秧苗移栽方法的试验为例，来说明正交试验设计的方差分析.

首先，我们在选用正交表时，要求除了被因子和它们的交互作用所占用的那些列外，至少还应留有一个空白列作为估计误差之用. 表 18 的第 3 和第 7 两列是空白列，在计算时，空白列也要象其他各列一样进行计算. 因为正交表各列水平间偏差平方和的总和等于八次试验总的偏差平方和，所以可将正交表上所有空白列的偏差平方和作为误差的偏差平方和.

表 18 的八个数据之间所以产生差异，其原因主要有下列两个：

(1) 各因子(或交互作用)水平之间的差异；

(2) 误差.

它们偏差平方和的自由度服从下面的规律：

(1) 偏差平方和的自由度等于偏差平方的项数减1. 因此因子各水平偏差平方和的自由度是水平数减1. 在正交表上我们也把它叫做列的自由度. 这里A、B、C的自由度都是1.

(2) 两个因子交互作用的偏差平方和的自由度，等于两个因子各自的自由度的乘积. 这里$A\times B$、$B\times C$的偏差平方和的自由度都是 $1\times1=1$，正好等于正交表上所占用列的自由度.

(3) 误差的自由度等于所用正交表上空白列自由度的和.

表18中，八个数据都大于600，我们把每一个数据都减去600，仍记之为y_i，这样做并不影响数据间的差异程度，却可以简化计算.

现作方差分析计算如下：

设以$\bar{y}$代表八个数据y_i的平均值

$$\bar{y}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}y_i=\frac{1}{8}(0.0+13.3+0.6+\cdots+88.0+86.6)$$
$$=\frac{415.7}{8}.$$

为了今后计算的需要，我们算出

$$\frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{8}y_i\right)^2=\frac{(415.7)^2}{8}=21600.81,$$

通常用符号CT来表示它，读作校正项.

设以$S_{总}$表示八个数据的偏差平方和

$$S_{总}=\sum_{i=1}^{8}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{8}y_i^2-\frac{(\sum y_i)^2}{8}=\sum_{i=1}^{8}y_i^2-CT$$
$$=0.0^2+13.3^2+\cdots+86.6^2-CT=20831.12,$$

自由度$=8-1=7$.

它反映数据间差异的情况.

再以 S_A 记因子 A 两个水平间的偏差平方和. A 占正交表上第 1 列，它的水平平均分别是 $\bar{I}_1$ 和 $\bar{II}_1$,

$$
\begin{aligned}
S_A &= 4\times[(\bar{I}_1-\bar{y})^2+(\bar{II}_1-\bar{y})^2] \\
&= 4\times\left[\left(\frac{I_1}{4}-\bar{y}\right)^2+\left(\frac{II_1}{4}-\bar{y}\right)^2\right] \\
&= 4\times\left[\frac{I_1^2+II_1^2}{16}-2\bar{y}\left(\frac{I_1+II_1}{4}\right)+2\bar{y}^2\right] \\
&= 4\times\left[\frac{I_1^2+II_1^2}{16}-2\bar{y}\cdot 2\bar{y}+2\bar{y}^2\right]=\frac{I_1^2+II_1^2}{4}-8\bar{y}^2 \\
&= \frac{I_1^2+II_1^2}{4}-8\times\left(\frac{\sum_{j=1}^{8}y_j}{8}\right)^2 \\
&= \frac{I_1^2+II_1^2}{4}-\frac{1}{8}\left(\sum_{j=1}^{8}y_j\right)^2=\frac{I_1^2+II_1^2}{4}-CT \\
&= \frac{20.5^2+395.2^2}{4}-CT=17550.01,
\end{aligned}
$$

自由度 $=1$.

这里括号外乘上 4, 其理由同以前拉丁方试验中品种间的偏差平方和要乘上 3 一样. 因为在表 $L_8(2^7)$ 中，每个水平重复试验 4 次，所以，用两个水平平均值的偏差平方和来表示八个数据中因子 A 总的偏差平方的和时，就要乘上 4.

用同样的方法可以算出 S_B, S_C, $S_{A\times C}$, $S_{B\times C}$, 和两个空白列的偏差平方和 S_3, S_7. 自由度都是 1.

上述一系列偏差平方和的计算除 $S_总$ 外都可在表上进行，具体见表 20.

由于空白列的偏差平方和反映了误差，所以

$$S_误=S_3+S_7=755.11,$$

自由度 $=2$.

表 20

试验号 \ 因子	A 1	B 2	3	C 4	$A\times C$ 5	$B\times C$ 6	7	数据 y_i
1	1	1	1	1	1	1	1	0.0
2	1	1	1	2	2	2	2	13.3
3	1	2	2	1	1	2	2	0.6
4	1	2	2	2	2	1	1	6.6
5	2	1	2	1	2	1	2	74.0
6	2	1	2	2	1	2	1	146.6
7	2	2	1	1	2	2	1	88.0
8	2	2	1	2	1	1	2	86.6
I_j	20.5	233.9	187.9	162.6	233.8	167.2	241.2	$\sum y_i=415.7$
II_j	395.2	181.8	227.8	253.1	181.9	248.5	174.5	$CT=\frac{(415.7)^2}{8}$
I_j^2	420.25	54709.21	35306.41	26438.76	54662.44	27955.84	58177.44	$=21600.81$
II_j^2	156183.04	33051.24	51892.84	64059.61	33087.61	61752.25	30450.25	
$I_j^2+II_j^2$	156603.29	87760.45	87199.25	90498.37	87750.05	89708.09	88627.69	
$\frac{1}{4}(I_j^2+II_j^2)$	39150.82	21940.11	21799.81	22624.59	21937.51	22427.02	22156.92	
$S_j=\frac{1}{4}(I_j^2+II_j^2)-CT$	17550.01	339.30	199.00	1023.78	336.70	826.21	556.11	

$$S_{总}=\sum y_i^2-CT=0.0^2+13.3^2+0.6^2+\cdots+88.0^2+86.6^2-CT=42431.93-21600.81=20831.12$$

在计算过程中难免出现差错，现在提供三个验算的方法：

(1) 每列各水平所对应的数据之和应等于 $\sum y_i$。比如表 20 中，

$$I_j + II_j = 415.7 = \sum y_i.$$

(2) 各列偏差平方和的总和应等于总的偏差平方和 $S_{总}$。在表 20 中

$$\sum_{j=1}^{7} S_j = 17550.01 + 339.30 + \cdots + 556.11 = 20831.11,$$

而 $S_{总} = 20831.12$,

它们的值相差 0.01. 由于计算过程中取近似值的关系，所以上面这一点微小的差异是允许的.

(3) 各列自由度之和应等于正交表上的试验次数减 1. 在表 20 中，共有 7 列，每列自由度都是 1，总共等于 7，恰好是 8 次试验减 1.

最后，我们进行 F 比的显著性检验，并将结果列成方差分析表，如表 21.

表 21　方差分析表

来　源	偏差平方和	自由度	平均偏差平方和	F 比	显著性
A	17550.01	1	17550.01	46.5	*
B	339.30	1	339.30	0.9	
C	1023.78	1	1023.78	2.7	
$A\times C$	336.70	1	336.70	0.9	
$B\times C$	826.21	1	826.21	2.2	
误　差	755.11	2	377.56		
	20831.11	7			

$F_{0.05}(1, 2) = 18.5$

结论：

(1) 方差分析表明，因子 A 显著，其余都不显著.

(2) 因为 $I_1<II_1$，所以因子 A 以取水平"2"为好.

(3) 因子 B 和 C 都不显著，取任何一个水平都可以，从节约的角度考虑，可取 B_1、C_1.

如此决定的水平搭配 $A_2B_1C_1$ 恰好是第5号试验，它的亩产量是674斤，比第六号试验的746.6斤低72.6斤. 因为误差的平均偏差平方和比较高，这72.6斤的差异很可能是误差引起的. 以前直观的分析没有考虑误差，所以与这里的结论有所不同，到底哪一个搭配好，可以再做几次 $A_2B_1C_1$ 和 $A_2B_1C_2$ 的对照试验，以取得最后的结论.

上面是一个二水平正交试验的方差分析. 三水平正交试验的方差分析与二水平的基本相同，只有某些枝节的区别，概述如下：

(1) 设 A、B 是两个三水平因子，据上面关于自由度的规则，A、B 的偏差平方和的自由度都是2，交互作用 $A\times B$ 的偏差平方和的自由度是4，而三水平正交表上每一列的自由度为2，所以 $A\times B$ 要占两列. 它的偏差平方和要等于这两列偏差平方和的和.

(2) 假如用 $L_{27}(3^{13})$ 表，那么

$$S_A=9\times[(\bar{I}_A-\bar{y})^2+(\overline{II}_A-\bar{y})^2+(\overline{III}_A-\bar{y})^2]$$

$$=\frac{1}{9}(I_A^2+II_A^2+III_A^2)-CT.$$

这里偏差平方和外所以乘上9，是因为每一水平平均值 $\bar{I}_A$，$\overline{II}_A$，$\overline{III}_A$ 都是九个数据的平均. 其余类推.

正交试验设计是解决多因子试验的一个好方法，在工业生产中已有广泛应用. 可以预料，正交试验设计在农业生产

中也将得到广泛的应用，希望读者能在实践中不断总结经验，逐步推广。

小　结

在农业生产中，我们经常要进行科学试验．试验设计就是安排试验、分析试验结果的一种数学方法．它能使试验次数尽可能地少，而分析出来的结论明确可靠．

常用的试验设计方法有

(1) 对照试验设计；

(2) 拉丁方试验设计；

(3) 正交试验设计．

试验结果的分析方法有：

(1) 直观分析法；

(2) 方差分析法．

习　题

1．在进行田间品种试验时，为什么要求田块条件、栽培管理尽可能做到一样？

2．在对照试验设计中，对照组(例如对照品种)起什么作用？

3．什么是拉丁方试验设计，它有什么特点？

4．我们在六块试验田里种植油菜，考察五种不同的施肥方法对亩产量的影响，取得试验结果如下(单位：斤/亩)：

施肥法＼田块	1	2	3	4	5	6
1	289	256	276	236	222	271
2	274	244	286	250	300	300
3	322	251	265	240	277	277
4	259	242	310	246	299	253
5	259	244	286	254	226	253

通过这些数据，分析出哪一种施肥方法最好.

5. 某科学种田小组对五个水稻品种进行亩产量比较试验．设以 A_1，A_2，…，A_5 代表这五个品种，其中 A_5 为对照品种．得出各小区的产量如下(单位：斤)：

重复 \ 品种	A_1	对 照	A_2	A_3	对 照	A_4
1	28.1	20.9	21.3	30.5	22.7	29.2
2	27.1	23.2	21.7	31.5	20.8	29.6
3	24.8	18.4	22.7	31.4	19.8	28.6

通过这些数据，分析比较各外引品种的优劣，如每一小区的面积为20平方米，试估计各品种的折合亩产量.

6. 某农科站对五个小麦品种进行产量试验，采用5×5拉丁方设计．其排列和产量如下表，左上角数字代表品种，右下角数字代表产量，单位：斤/亩.

1 475	4 344	2 413	3 327	5 378
5 392	3 349	1 407	2 393	4 345
3 396	1 442	4 362	5 374	2 404
4 267	2 378	5 362	1 441	3 336
2 464	5 371	3 379	4 334	1 400

试对五个小麦品种进行统计分析.

7. 对于下列试验，请决定选用哪一个正交表，并给出你的表头设计.

(1) 五个二水平因子 A、B、C、D、E，并要考虑交互作用 $A\times B$，$B\times E$；

(2) 四个二水平因子 A、B、C、D，并要考虑交互作用 $A\times B$，$C\times D$；

(3) 四个三水平因子 A、B、C、D，并要考虑交互作用 $B\times C$，$B\times D$；

(4) 六个三水平因子 A、B、C、D、E、F，并要考虑交互作用 $D\times E$.

8. 在表 6 的水稻栽培试验中，我们用正交表 $L_4(2^3)$ 安排试验，并取得如下的数据：

因子 \ 试验号	根外施肥 A	氮肥量 B	插植规格 C	亩产量 y_i
1	920	20 斤/亩	4 寸×4 寸	683 斤
2	920	25 斤/亩	5 寸×4 寸	710 斤
3	腐植酸铵	20 斤/亩	5 寸×4 寸	848 斤
4	腐植酸铵	25 斤/亩	4 寸×4 寸	869 斤

试运用直观分析法分析各个因子影响的大小和选取各因子的较优水平.

9. 为了研究某种农药生产的收率问题，我们考察四个二水平因子对收率 y 的影响(y 越高越好). 因子及它们的水平如下：

A: 反应温度 A_1: 50°C, A_2: 70°C;

B: 反应时间 B_1: 1 小时, B_2: 2 小时;

C: 硫酸浓度 C_1: 17%, C_2: 27%;

D: 操作方法 D_1: 搅拌, D_2: 不搅拌.

根据实际经验，因子 A 和因子 B 有交互作用，因反应温度低，反应时间就要长，反过来，如反应温度高，反应时间就可短一些. 采用正交表 $L_8(2^7)$，把因子 A, B, C, D 分别放在第 1, 2, 4, 7 四列上. 八个试验所得的数据减去 65% 分别等于 1.5%, 6.5%, 6.5%, 7.0%, 4.0%, 8.0%, −1.0%, 4.0%. 运用方差分析法分析各因子的影响是否显著，并提出最优生产方案.

第三节　回 归 分 析

毛主席教导我们："**一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的**"．在生产斗争和科学实验中，我们经常要研究一个量和另外一个（或几个）量之间的关系．比如基本苗数与有效穗数，施肥量与产量，猪的重量与它的身长和胸围之间的关系等等．如果我们能把这些关系用数学公式表示出来，这对今后的生产和科研都将有很大的益处．但是这种关系，并不象我们以前学过的一个量确定后，另一个量就跟着完全确定的函数关系．比如，作物每亩的有效穗数和它的基本苗数有关，但是对于每亩同样的基本苗数，即使其他管理水平都一样，其最后所得的有效穗数也不会完全一样，这是因为其中还含有误差．我们把这样的关系叫做回归关系．有关回归的理论和计算、分析方法叫做回归分析．

一、两个变量的线性回归关系

两个变量间的线性回归，就是在科学实验中经常遇到的配直线问题．我们将在上册第六章中求直线型经验公式的基础上，作进一步的研究．

我们在上册第 324 页曾遇到这样一道习题：某生产队贫下中农为了摸索小麦高产的经验，对每亩田基本苗数与成熟期有效穗数的关系，在五块田上进行了科学实验，在同样的栽培管理条件下，取得试验结果如表 22．要求我们求出每亩基本苗数 x 与有效穗数 y 之间的经验公式．现在我们就以它为例来作进一步的讨论．

以每亩基本苗数为横坐标 x，每亩有效穗数为纵坐标 y，

表 22

	基本苗数 x (万/亩)	有效穗数 y (万/亩)
1	15.0	39.4
2	25.8	42.9
3	30.0	41.0
4	36.6	43.1
5	44.4	49.2

将上表中数字点在一直角坐标系上. 可以看出, 这些点大致接近于一条直线(图 12-11). 因此, 我们用一直线方程

$$y=a+bx \qquad (1)$$

来表示基本苗数 x 与有效穗数 y 之间的关系. 我们把方程(1)叫做 y 对 x 的回归方程, 其中 a 为回归方程中的常数, b 为回归系数.

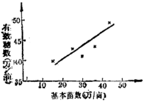


图 12-11

我们用第六章中介绍过的平均值法, 来确定 a, b 的值. 即把各点的坐标分别代入方程(1), 把所得的含有 a 和 b 的方程随意分成两组, 再把各组方程相加, 得到含有 a 和 b 的两个方程:

$$\begin{array}{rl} 39.4= & a+15.0b \\ 42.9= & a+25.8b \\ +)\ 41.0= & a+30.0b \\ \hline 123.3= & 3a+70.8b \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 43.1= & a+36.6b \\ +)\ 49.2= & a+44.4b \\ \hline 92.3= & 2a+81.0b \end{array}$$

解这两个方程所组成的方程组:

$$\begin{cases} 123.3=3a+70.8b, \\ 92.3=2a+81.0b, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} a\approx 34, \\ b\approx 0.3. \end{cases}$$

于是，y 对 x 的回归方程是

$$y=34+0.3x, \tag{2}$$

这也就是我们所要求的经验公式．

有了这个方程，我们就可以从每亩基本苗数来推算每亩有效穗数．但是应该指出，表 22 中的每亩有效穗数是含有误差的，因此，这里导出的直线方程也一定含有误差．于是我们要问直线方程(2)是不是 y(每亩有效穗数)对 x(每亩基本苗数)的最好的回归方程呢？就是说，这条回归直线与已知点的误差是否最小．如果不是，有没有什么办法可以导出一个误差最小的回归直线？因为用误差最小的回归直线来推算 y 的值(即估计 y 的真值)其结果将更可靠些．

下面我们就来作些分析．设用

$$\tilde{y}=a+bx \tag{3}$$

来表示误差最小的回归方程．用 (x_j, y_j) $(j=1, 2, \cdots, n)$ 代表 n 对观测所得的数据．在回归直线(3)上，横坐标为 x_j 的点具有纵坐标

$$\tilde{y}_j=a+bx_j,$$

它与实测所得的数据 y_j 的距离是

$$y_j-\tilde{y}_j=y_j-a-bx_j.$$

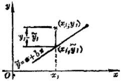


图 12-12

通常我们用这个距离估计误差．要求误差最小，就是要求所有数据的这一距离平方的和为最小．根据这一要求，我们可以得到求出 a 和 b 的计算公式如下(证明从略)：

$$b=\frac{\sum_{j=1}^{n}x_jy_j-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{j=1}^{n}x_j^2-n\bar{x}^2},\tag{4}$$

$$a=\bar{y}-b\bar{x},\tag{5}$$

其中 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 分别是横坐标 x_j 和纵坐标 y_j 的平均值. 这种确定 a 和 b 的方法叫做最小二乘法.

上面的具体计算可按表 23 逐步进行. 表中 y^2 列是为了以后分析要用.

表 23

j	x	y	x^2	y^2	xy
1	15.0	39.4	225.00	1552.36	591.00
2	25.8	42.9	665.64	1840.41	1106.82
3	30.0	41.0	900.00	1681.00	1230.00
4	36.6	43.1	1339.56	1857.61	1577.46
5	44.4	49.2	1971.36	2420.64	2148.48
总　和	151.8	215.6	5101.56	9352.02	6689.76
平　均	$\bar{x}=30.36$	$\bar{y}=43.12$			

$n=5$

$$\begin{array}{ll} \sum x_j^2=5101.56 & \sum x_jy_j=6689.76 \\ -)\ \ n\bar{x}^2=4608.65 & -)\ \ n\bar{x}\cdot\bar{y}=6545.62 \\ \hline \sum x_j^2-n\bar{x}^2=\ 492.91 & \sum x_jy_j-n\bar{x}\cdot\bar{y}=\ 144.14 \end{array}$$

$$b=\frac{144.14}{492.91}=0.29\approx0.3$$

$$a=\bar{y}-b\bar{x}=43.12-0.29\times30.36$$

$$=43.12-8.80=34.32\approx34.3$$

$$\tilde{y}=34.3+0.3x.\tag{6}$$

这一公式要比前面用平均数法所求得的公式(2)略为精

确一些．我们将用它来作为从每亩基本苗数推算每亩有效穗数的依据．例如，如果每亩基本苗数 $x=26.1$，那么

$$\tilde{y}=34.3+0.3\times 26.1=42.1(\text{万/亩}),$$

就是说，成熟期的有效穗数大约是每亩 42.1 万．

反过来，也可以根据有效穗数的预定要求，来选择合适的播种量．

为了确保丰收，每亩有效穗数不宜过多也不宜过少，根据该生产队的经验，小麦的每亩有效穗数一般以 41～43 万为宜．根据这个标准，如果以每 1 斤小麦播种后出苗 0.94 万棵计算，那么小麦的每亩播种量可计算如下：

分别以 $y=41$, $y=43$ 代入方程(6)，

当 $y=41$ 时，$x=\dfrac{41-34.3}{0.3}\approx 22.3$(万/亩)；

当 $y=43$ 时，$x=\dfrac{43-34.3}{0.3}\approx 29.0$(万/亩)．

因此，该生产队小麦的每亩播种量应介于

$$\frac{22.3}{0.94}\approx 23.7(\text{斤/亩})$$

和

$$\frac{29.0}{0.94}\approx 30.9(\text{斤/亩})$$

之间．这就是说，小麦的基本苗数每亩在 22.3～29.0 万棵之间比较合适，因此，小麦的播种量应在每亩 23.7～30.9 斤这个范围之内．

必须指出，这个方程中的常数 a 和回归系数 b 是有地区性的．随着地区的不同，a 和 b 的值也会不同．

二、回归直线在植保方面的应用

【例 1】 某地贫下中农根据长期的观察和实践，发现该

地每年五月中、下旬合计降雨量与六月上、中旬的粘虫发生量之间有着密切的关系．表 24 记录了他们八年的观察数据．

表 24

j	每年5月中、下旬合计降雨量 x（毫米）	每年6月上、中旬一台糖蜜诱杀器诱得粘虫数 y（只）
1	46.1	288
2	31.9	299
3	56.4	367
4	26.6	53
5	80.6	777
6	24.8	56
7	40.2	359
8	28.6	63

试求出 y 对 x 的回归方程．

解：如图 12-11 那样，把表 24 中的对应值作为点的坐

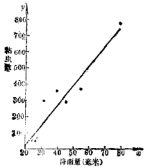


图 12-13

标，点在一个直角坐标系中(图 12-13)，从图上看到这些点接近于一条直线，于是列表计算，得出结果如表 25. 表中的 y^2 列是为了以后分析要用.

表 25

j	x	y	x^2	y^2	xy
1	46.1	288	2125.21	82944	13276.8
2	31.9	299	1017.61	89401	9538.1
3	55.4	367	3069.16	134689	20331.8
4	26.6	53	707.56	2809	1409.8
5	80.6	777	6496.36	603729	62626.2
6	24.8	56	615.04	3136	1388.8
7	40.2	359	1616.04	128881	14431.8
8	28.6	63	817.96	3969	1801.8
总和	334.2	2262	16464.94	1049558	124805.1
平均	41.78	282.75			

$n=8$

$$\sum x_j^2=16464.94 \qquad \sum x_j y_j=124805.10$$

$$n\bar{x}^2=13964.55 \qquad n\bar{x}\cdot\bar{y}=94506.36$$

$$\sum x_j^2-n\bar{x}^2=2500.39 \qquad 30298.74$$

$$b=\frac{30298.74}{2500.39}\approx 12.12$$

$$a=\bar{y}-b\bar{x}=282.75-12.12(41.78)$$

$$=-223.62$$

$$\tilde{y}=-223.62+12.12x.$$

用这个公式，可以由五月中、下旬的合计降雨量来预报六月上、中旬的粘虫发生量.

三、可以化成线性回归的例子

两个变量之间的回归关系并不总是直线，相反大都是曲线．有些曲线，只要把变量作一个简单的数学变换，便可化成一条直线．这时，我们就可以用上面所学过的方法来求出它们的回归方程．现在我们用一个实例来说明．

【例 2】 在上海郊县，粘虫是对小麦危害比较严重的一种害虫．某植保小组经过长期观察，发现粘虫卵孵化成幼虫的历期与气温有密切关系．为了掌握粘虫生长规律，及时扑灭，确保小麦丰收，他们收集了粘虫卵孵化的平均历期 N 与平均气温 T 的数据，如表 26.

表 26

平均历期 N（天）	平均气温 T（°C）
30.4	11.8
15.0	14.7
13.8	15.4
12.7	16.5
10.7	17.1
7.5	18.3
6.8	19.8
5.7	20.3

试求出 N 对 T 的经验公式．

解：我们把表中的对应数据点在一直角坐标系上，并顺着点子的趋势描出一条曲线，如图 12-14．从图上看到 N 较小时，T 下降得快一些，曲线陡一些，N 较大时，T 下降得慢

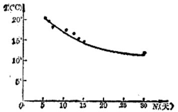


图 12-14

一些，曲线平坦些，它与我们已经学过的双曲线的一支很相似．我们对 N 作一简单的数学变换

$$V=\frac{1}{N},$$

即对 N 的每一个值，算出它的倒数，作为 V 的值，把 N 和 T 的对应关系化成 V 和 T 的对应关系，如表 27.

表 27

N	$V=\frac{1}{N}$	T
30.4	0.0329	11.8
15.0	0.0667	14.7
13.8	0.0725	15.4
12.7	0.0787	16.5
10.7	0.0935	17.1
7.5	0.1333	18.3
6.8	0.1471	19.8
5.7	0.1754	20.3

我们再把表 27 上 V, T 的对应数据点在一直角坐标系上，如图 12-15．由于这些点子很接近一条直线，我们用以

前学过的求回归直线的方法，算出 T 对 V 的回归公式，如表 28。

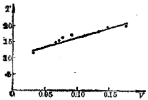


图 12-15

表 28

j	V	T	V^2	T^2	VT
1	0.0329	11.8	0.001082	139.24	0.38822
2	0.0667	14.7	0.004449	216.09	0.98049
3	0.0725	15.4	0.005256	237.16	1.11650
4	0.0787	16.5	0.006194	272.25	1.29855
5	0.0935	17.1	0.008742	292.41	1.59885
6	0.1333	18.3	0.017769	334.89	2.43939
7	0.1471	19.8	0.021638	392.04	2.91258
8	0.1754	20.3	0.030765	412.09	3.56062
总　和	0.8001	133.9	0.095895	2296.17	14.29520
平　均	0.1000	16.7375			

$n=8$

$\sum V_j^2=0.095895$　　$\sum V_jT_j=14.29520$

$n\bar{V}^2=0.080010$　　$n\bar{V}\cdot\bar{T}=13.39167$

$\sum V_j^2-n\bar{V}^2=0.015885$　　$\sum V_jT_j-n\bar{V}\cdot\bar{T}=0.90353$

$$b=\frac{0.90353}{0.015885}=56.88$$

$$a=\bar{T}-b\bar{V}=16.7375-56.88(0.1000)=11.05$$

$$\tilde{T}=11.05+56.88V.$$

以 $V=\frac{1}{N}$ 代入上式，得到 T 对 N 的回归方程

$$T=11.05+\frac{56.88}{N}.$$

再作简单的代数运算，就得到从平均气温 T 预测粘虫卵孵化历期 N 的公式

$$N=\frac{56.88}{T-11.05}.$$

如果在四月中旬发现粘虫卵，而四月中旬平均气温据统计在 14°C 左右，那么，以 $T=14$ 代入公式就得到粘虫卵孵化的平均历期

$$N=19.3(\text{天}).$$

即从发现粘虫卵日起，大约 19 天粘虫卵就将孵化成幼虫．如在此时采取适当除虫措施，定可防患于未然，确保小麦丰收．

四．方差分析

在上面几例中，y 都是通过 y 对 x 的直线关系来估计的，而 y 对 x 的直线关系我们都是凭目测来决定的，多少带点主观的成分．因此，y 对 x 的关系是否确实是直线，必须有一客观的依据来加以鉴定．以前我们学过的方差分析就是一个很有效的鉴定工具．

仍以本节的第一个问题为例．设以 y_j 表示对应于 x_j 的观察值，$j=1, 2, \cdots, 5$；$\tilde{y}_j$ 是同一 x_j 由回归方程 (3) 推算出来的值(叫做回归值)；$\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 分别为 x 和 y 的平均值．

每一 y 值的偏差可以分解为两部分：

$$y_j-\bar{y}=y_j-\tilde{y}_j+\tilde{y}_j-\bar{y}=(y_j-\tilde{y}_j)+(\tilde{y}_j-\bar{y}),$$

其中第一部分$(y_j-\tilde{y}_j)$(如图 12-12 所示)反映了误差,第二部分,根据回归方程(3)和公式(5),得

$$\tilde{y}_j-\bar{y}=a+bx_j-\bar{y}=\bar{y}-b\bar{x}+bx_j-\bar{y}=b(x_j-\bar{x}),$$

它主要反映了 y 对 x 的直线关系部分. 这说明了表 22 中数据 y 的差异主要是由于下列两种原因:

(1) y 对 x 的直线关系;

(2) 误差.

从理论上还可证明, 数据 y 的偏差平方和恰好也可分解为这两部分的偏差平方和, 即

$$\sum_{j=1}^{5}(y_j-\bar{y})^2=\sum_{j=1}^{5}(y_j-\tilde{y}_j)^2+\sum_{j=1}^{5}(\tilde{y}_j-\bar{y})^2. \tag{7}$$

我们把 y 的偏差平方和叫做总的偏差平方和,记为 $S_{总}$,

$$S_{总}=\sum_{j=1}^{5}(y_j-\bar{y})^2=\sum_{j=1}^{5}y_j^2-5\bar{y}^2;$$

把 $\sum(\tilde{y}_j-\bar{y})^2$ 叫做回归偏差平方和,记为 $S_{回}$,

$$S_{回}=\sum_{j=1}^{5}(\tilde{y}_j-\bar{y})^2=\sum_{j=1}^{5}[b(x_j-\bar{x})]^2=b^2\sum_{j=1}^{5}(x_j-\bar{x})^2,$$

它主要反映由 x_j 的变化而引起的 y_j 的变化; 误差的偏差平方和记为 $S_{误}$,

$$S_{误}=\sum_{j=1}^{5}(y_j-\tilde{y}_j)^2,$$

综合起来,(7)式就是

$$S_{总}=S_{回}+S_{误}. \tag{8}$$

$S_{总}$ 的自由度等于和中平方项的个数减 1, 即是 4. 一元回归偏差平方和的自由度是 1. $S_{误}$ 的自由度则为这二者之差, 所以是 3.

只要把相应的自由度去除 $S_{回}$, $S_{误}$, 就可以得到两者各自

的平均偏差平方和. 我们用它们的F比来检验线性回归部分的平均偏差平方和是否显著, 作为判断两个变量y和x之间有无直线关系的依据.

由表 23 我们算得

$$S_{总}=\sum y_j^2-5\bar{y}^2=9352.02-5\times(43.12)^2$$
$$=9352.02-9296.67=55.35,$$
$$S_{回}=b^2\sum(x_j-\bar{x})^2=0.09\times 492.91$$
$$=44.36,$$

并根据等式(8), 得

$$S_{误}=S_{总}-S_{回}=10.99.$$

把结果汇总成方差分析表, 如表 29.

表 29　方差分析表

来　源	偏差平方和	自由度	平均偏差平方和	F 比	显著性
回　归	$S_{回}=44.36$	1	44.36	12.12	*
误　差	$S_{误}=10.99$	3	3.66		
总　和	$S_{总}=55.35$	4			

$F_{0.05}(1,3)=10.13$

由于F比显著, 因此, 我们有$1-\alpha=95\%$的把握, 认为每亩有效穗数y和每亩基本苗数x之间有直线回归的关系.

如果F比不显著, 那么就有下列三种可能:

(1) 影响 y 的，除 x 外，可能还有其他变量；

(2) x 和 y 的回归关系可能是一条曲线，而不是一条直线；

(3) x 和 y 无关.

这时求出的回归直线作用不大，需对 x 和 y 的关系作进一步的研究.

小　结

在农业生产中，我们经常要求某些量之间的经验公式．由于误差的干扰，所以这些数量关系，不是平常的函数关系，而是一种回归关系．回归分析就是解决这类问题的一种数理统计方法．

设 y 对 x 的回归直线方程是

$$y=a+bx.$$

确定 a 和 b 的方法有两种：

(1) 平均值法.

(2) 最小二乘法．求 a 和 b 的公式是

$$a=\bar{y}-b\bar{x},$$

$$b=\frac{\sum x_i y_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}.$$

对于用最小二乘法得出的回归方程，还可进行方差分析，以鉴定回归是否确实是直线.

有时，两个变量之间的回归关系虽然不是线性的，但可以通过变量变换化为线性回归的问题，从而得出它们回归曲线的方程.

习　题

1. y 对 x 的回归关系与 y 依赖于 x 的函数关系有什么区别？
2. 什么是最小二乘法的基本思想？
3. 下表是一种小麦高产品种的亩产量 y(斤)与它的千粒重 x(克)之间关系的实验数据：

j	x (克)	y (斤)	j	x (克)	y (斤)
1	27.3	378.4	8	29.4	263.1
2	35.0	350.4	9	27.1	191.5
3	33.9	424.8	10	34.8	430.7
4	28.3	414.0	11	31.2	417.3
5	30.3	328.1	12	26.6	206.6
6	32.5	442.4	13	34.6	477.8
7	35.2	342.5	14	32.9	483.3

试用最小二乘法求出亩产量对千粒重的回归直线方程．并作方差分析，以鉴定此回归关系是否是一直线．

4. 下表列出的数据是上游站的洪峰流量 x 与它到达下游站的时间 y:

j	洪峰流量 x (立方米/秒)	时间 y (小时)	j	洪峰流量 x (立方米/秒)	时间 y (小时)
1	474	12	8	818	8
2	1607	7	9	360	15
3	281	19	10	316	17
4	469	12	11	398	13
5	635	12	12	243	20
6	416	16	13	344	11
7	1536	7			

把这些数据的对应值作为点的坐标，点在一直角坐标系上，读者将会发现，y 对 x 的回归关系是一条曲线，它近似于双曲线的一支．试作变换 $V=\frac{1}{x}$，求出 y 对 V 的回归方程，并作方差分析．假如鉴定下来，y 对 V 的回归是直线，那么，再求出 y 对 x 的回归方程．

根据你所得出的回归方程，试预测上游站的洪峰流量为 740 立方米/秒时，下游站出现洪峰的时间．

附　录

一、常用对数表

对数 真数 N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
对数 真数 N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

对数 真数 N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
对数 真数 N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

对数 真数 *N*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	4	4
对数 真数 *N*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

二、反对数表

对数尾数 m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1353	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
对数尾数 m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

对数尾数 m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10

(反对数表)

对数尾数 m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	15
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20
对数尾数 m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

"常用对数表"用法说明：

1. 由"常用对数表"可以查出任意一个四个数位数的对数的尾数. 数位超出四个，可以先四舍五入，得到四个数位的数，再查表.

2. 表中列出了 N 从 $1.001\sim9.999$ 的对数的尾数. 表中标有 N 的左边一直列是真数的前两个数位的数字，顶上和底下两横行是真数的第三个数位的数字. 三个数位的数的对数尾数，可由表上直接查出.

3. 右边顶上一横行是真数的第四个数位的数字. 当真数是四个数位时，就需要用到它所对应的补充值.

【例1】 查表求 lg7651.

解：把 7651 写成 7.651×10^3，查表得

$$\lg7.651=0.8837+0.0001=0.8838.$$

因为 765 是 4 位数，所以它的对数的首数是 $4-1=3$.

$$\therefore\quad \lg7651=3.8838.$$

【例2】 查表求 lg0.03842.

解：把 0.03842 写成 3.842×10^{-2}，查表得

$$\lg3.842=0.5843+0.0002=0.5845.$$

因为 0.0384 小于 1，在第一个不为零的数之前，有 2 个"0"，所以它的首数是 -2

$$\lg0.03842=\bar{2}.5845.$$

"反对数表"用法说明：

1. 由"反对数表"可查出对数尾数所对应的真数的四位数字.

2. 表中标有"m"的左边一直列是对数尾数的前两位小数，顶上和底下一横行是对数尾数的第三位小数.

3. 表的右边顶上一横行是对数尾数的第四位小数. 当对数尾数是四位小数时，就需要用到它所对应的补充值.

【例1】 已知 $\lg N=1.2344$，查 N.

解：查"反对数表"，得 0.2344 的反对数是 1716. 因为已知首数是 1，所以真数整数部分的位数 $1+1=2$，即 $N=17.16$.

【例2】 已知 $\lg N=\bar{2}.6931$，查 N.

解：对数尾数 0.6931 所对应的真数是 $4.932+0.0001=4.933$，又因为对数首数是 $\bar{2}$，所以真数左边第一个非零数前有两个 0，即

$$N=0.04933.$$

三、试验设计正交表

$L_4(2^3)$

试验号 \ 列号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

$L_8(2^7)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

$L_3(2^7)$二列间的交互作用表

列号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
	(1)	3	2	5	4	7	6
		(2)	1	6	7	4	5
			(3)	7	6	5	4
				(4)	1	2	3
					(5)	3	2
						(6)	1
							(7)

$L_{16}(2^{15})$

列号 / 试验号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1

$L_{16}(2^{15})$二列间的交互作用

列号 / 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	(1)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
		(2)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
			(3)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
				(4)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
					(5)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
						(6)	1	14	15	12	13	10	11	8	9
							(7)	15	14	13	12	11	10	9	8
								(8)	1	2	3	4	5	6	7
									(9)	3	2	5	4	7	6
										(10)	1	6	7	4	5
											(11)	7	6	5	4
												(12)	1	2	3
													(13)	3	2
														(14)	1

$L_9(3^4)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

注：任意二列间的交互作用为另外二列。

$L_{27}(3^{13})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
7	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
10	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2
18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3
19	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2

$L_{27}(3^{13})$二列间的交互作用

列号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	(1)	3 4	2 4	2 3	6 7	5 7	5 6	9 10	8 10	8 9	12 13	11 13	11 12
		(2)	1 4	1 3	8 11	9 12	10 13	5 11	6 12	7 13	5 8	6 9	7 10
			(3)	1 2	9 13	10 11	8 12	7 12	5 13	6 11	6 10	7 8	5 9
				(4)	10 12	8 13	9 11	6 13	7 11	5 12	7 9	5 10	6 8
					(5)	1 7	1 6	2 11	3 13	4 12	2 8	4 10	3 9
						(6)	1 5	4 13	2 12	3 11	3 10	2 9	4 8
							(7)	3 12	4 11	2 13	4 9	3 8	2 10
								(8)	1 10	1 9	2 5	3 7	4 6
									(9)	1 8	4 7	2 6	3 5
										(10)	3 6	4 5	2 7
											(11)	1 13	1 12
												(12)	1 11

$L_{16}(4^5)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4
5	2	1	2	3	4
6	2	2	1	4	3
7	2	3	4	1	2
8	2	4	3	2	1
9	3	1	3	4	2
10	3	2	4	3	1
11	3	3	1	2	4
12	3	4	2	1	3
13	4	1	4	2	3
14	4	2	3	1	4
15	4	3	2	4	1
16	4	4	1	3	2

$L_{25}(5^6)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4	4
5	1	5	5	5	5	5
6	2	1	2	3	4	5
7	2	2	3	4	5	1
8	2	3	4	5	1	2
9	2	4	5	1	2	3
10	2	5	1	2	3	4
11	3	1	3	5	2	4
12	3	2	4	1	3	5
13	3	3	5	2	4	1
14	3	4	1	3	5	2
15	3	5	2	4	1	3
16	4	1	4	2	5	3
17	4	2	5	3	1	4
18	4	3	1	4	2	5
19	4	4	2	5	3	1
20	4	5	3	1	4	2
21	5	1	5	4	3	2
22	5	2	1	5	4	3
23	5	3	2	1	5	4
24	5	4	3	2	1	5
25	5	5	4	3	2	1

四、F 表

$F(n_1, n_2)$　　10%

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	50
1	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	61.7	62.3	62.7
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.44	9.46	9.47
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.18	5.17	5.15
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.84	3.82	3.80
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.21	3.17	3.15
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.84	2.80	2.77
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.59	2.56	2.52
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.42	2.38	2.35
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.30	2.25	2.22
10	3.28	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.20	2.16	2.12
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.12	2.08	2.04
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.06	2.01	1.97
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.01	1.96	1.91
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	1.96	1.91	1.87
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	1.92	1.87	1.83
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.89	1.84	1.79
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.86	1.81	1.76
18	3.01	2.62	2.42	2.28	2.19	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.84	1.78	1.73
19	2.99	2.60	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.81	1.76	1.71
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.79	1.74	1.69
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.76	1.70	1.65
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.73	1.67	1.62
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.70	1.65	1.59
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.86	1.84	1.68	1.62	1.57
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.67	1.61	1.55
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.61	1.54	1.48
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.54	1.48	1.41
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.48	1.41	1.34
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.42	1.34	1.26

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	50
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	248	250	252
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.66	8.62	8.58
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.80	5.75	5.70
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.56	4.50	4.44
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.87	3.81	3.75
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.44	3.38	3.32
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	8.15	3.08	3.02
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	2.94	2.86	2.80
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.77	2.70	2.64
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.65	2.57	2.51
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.54	2.47	2.40
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.46	2.38	2.31
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.39	2.31	2.24
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.33	2.25	2.18
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.28	2.19	2.12
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.23	2.15	2.08
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.19	2.11	2.04
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.16	2.07	2.00
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.12	2.04	1.97
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.07	1.98	1.91
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.03	1.94	1.86
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	1.99	1.90	1.82
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	1.96	1.87	1.79
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	1.93	1.84	1.76
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	1.84	1.74	1.66
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.78	1.69	1.60
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.75	1.65	1.56
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.70	1.60	1.51
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.68	1.57	1.48
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1 96	1.91	1.66	1.55	1.46
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.57	1.46	1.35

五、习题答案

第七章

第一节 1. (1) $y^2=8x$; (2) $x^2=-y$; (3) $x^2=-16y$.

2. $x^2=13056y$. 3. $x^2=4000y$. 5. $y=\frac{a}{b^2}x^2$. 6. 4.9米.

7. 0.57米, 0.47米. 8. 距顶点94厘米处.

9. $y^2+20x-6y-51=0$, $y'^2=-20x'$. 10. $(-4, -1)$, $\left(-\frac{33}{8}, -1\right)$. 11. $y=\frac{7}{800}x^2+6$.

第二节 2. $y=-x^2-2x$. 2. (1) $(-3, -2)$, $x+3=0$, 向下开口; (2) $\left(\frac{5}{6}, -\frac{25}{12}\right)$, $6x-5=0$, 向上开口. 4. 应使长方形的高为0.8尺. 5. $x=30$尺, 其他两边是15尺. 6. 长方形部分的宽和高的比应是2:1. 7. 一间, 长:宽$=2:1$; 一排n间, 长:宽$=(n+1):n$.

第三节 1. $\frac{5}{2}$, -1. 2. (1) $\frac{1}{3}$, -2; (2) $\frac{6\pm\sqrt{66}}{4}$; (3) $\sqrt{6}\pm2\sqrt{2}$; (4) 2, $-\frac{11}{3}$. 3. 60毫米, 4. 20.7毫米. 5. 0.45米, 1.6米. 6. 61%.

7. (1) 0, -4; (2) 6.

第八章

第一节 1. $(x-6)^2+(y-2)^2=26$. 2. 6.88毫米. 3. 54.7毫米.

4. $(x+4)^2+(y+1)^2=25$.

6. $D_0=\frac{1}{2}(D+d)+\sqrt{Dd-(H-h)(H-h+D-d)}$.

第二节 1. (1) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$; (2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; (3) $\frac{x^2}{29}+\frac{y^2}{4}=1$; (4) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

2. $\frac{x^2}{3.525^2}+\frac{y^2}{2.876^2}=1$.　3. 3.4厘米.　4. $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{121}=1$,
$\frac{x^2}{576}+\frac{y^2}{225}=1$.　5. 12.5, 5.　6. $x^2+y^2=350^2$,
$\frac{x^2}{320^2}+\frac{y^2}{430^2}=1$, $e=0.67$.　7. (1) $\frac{\sqrt{6}}{30}$;　(2) $\frac{1}{60}$.

第三节　1. (1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1$;　(2) $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1$;
(3) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$;　(4) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.　2. $\frac{x^2}{65^2}-\frac{y^2}{209^2}=1$.
3. $\frac{x^2}{61.3^2}-\frac{y^2}{168.6^2}=1$.　4. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{279}=1$.　5. $\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.

第九章

第一节　1. $A(6, 45°)$, $B(4, 135°)$, $C(5, 210°)$, $D(4, -45°)$, $E(6, 0°)$, $F(5, 180°)$.　3. $(3, 0)$, $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $(-6\sqrt{3}, -6)$.　4. $(3, \pi)$, $\left(1, \frac{5}{4}\pi\right)$, $(13, 22°37')$.
6. $\rho=20+\frac{5}{2\pi}\theta$.　7. $\rho=30\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{16}\right)$,　$\rho=27+\frac{16}{\pi}\theta$ $\left(\frac{3\pi}{16}\leqslant\theta\leqslant\frac{13}{8}\pi\right)$;　每隔 $\frac{\pi}{16}$ 点的坐标: $\left(30, \frac{2\pi}{16}\right)$, $\left(31, \frac{4\pi}{16}\right)$, $\left(32, \frac{5\pi}{16}\right)$, …, $\left(52, \frac{25}{16}\pi\right)$.
9. (1) $\rho=56+\frac{20}{\pi}\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$;　(2) $\rho=76\left(\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{3}{2}\pi\right)$;
(3) $\rho=136-\frac{40}{\pi}\theta\left(\frac{3\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right)$.

第二节　2. $\begin{cases}\rho=\dfrac{112.5}{\cos\alpha},\\ \theta=\operatorname{tg}\alpha-\alpha.\end{cases}$　3. $\begin{cases}x=98.5(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\\ y=98.5(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi).\end{cases}$

第十章

第一节　1. (1) 3, 4, 5;　(2) $-5, -7.5, -3$;　(3) $-\frac{3}{2}$.

2. (1) 8; (2) $2^{0.125}$; (3) $\frac{1}{10}$; (4) 10. **3**. (1) -2.6778;

(2) 3.6232; (3) 0.8963; (4) 0.4824. **4**. (1) -3; (2) $-n$.

第二节 1. (1) 5.1279; (2) 0.2062; (3) 1.7783.

2. (1) 5.140; (2) 0.9642. **3**. 10马力. **4**. 404.3米.

5. 约4年. 6. 3569斤.

第十二章

第一节 5. $\bar{y}=121$ 斤, $s^2=59.9$. 6. 750小时.

第二节 4. 比较五种施肥方法的平均亩产量258.3, 275.7, 272.0, 268.2, 253.7(斤), 知道第二种施肥方法最好. 5. 答案见下表.

品种	A_1	A_2	A_3	A_4
位次	3	4	1	2
折合亩产量(斤)	900.8	743.9	1036.9	969.2

6. 品种的影响显著. 行与列之间土壤肥力的差异都不显著. 品种1最好. 7. (1) $L_8(2^7)$(但不能估计误差); (2) $L_{16}(2^{15})$; (3) $L_{27}(3^{13})$; (4) $L_{27}(3^{13})$. 8. B 因子的影响最大, A 次之, C 再次之. 各因子的较优水平是 A_2, B_2, C_2. 9. 方差分析表明,因子 C 和交互作用 $A\times B$ 显著. 最优生产方案是 $A_1B_2C_2D_2$.

第三节 3. $\tilde{y}=-437.44+25.68x$. 但根据方差分析, 此回归关系不能认为是一直线. 4. $\tilde{y}=4.53+\frac{3700}{x}$; 当 $x=740$ 立方米/秒时, $\tilde{y}=9.53$ 小时.